

Problemes àlgebra 17

161.- Demostreu que $\arctg\frac{1}{5} + \arctg 2 + \arctg 3 + \arctg\frac{2}{3} = \pi$.

Solució:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\arctg\frac{1}{5} + \arctg 2 + \arctg 3 + \arctg\frac{2}{3}\right) &= \frac{\operatorname{tg}\left(\arctg\frac{1}{5} + \arctg 2\right) + \operatorname{tg}\left(\arctg 3 + \arctg\frac{2}{3}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\arctg\frac{1}{5} + \arctg 2\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\arctg 3 + \arctg\frac{2}{3}\right)} = \\ &= \frac{\frac{\frac{1}{5} + 2}{1 - \frac{2}{5}} + \frac{3 + \frac{2}{3}}{1 - 2}}{\frac{\frac{1}{5} + 2}{1 - \frac{2}{5}} \cdot \frac{3 + \frac{2}{3}}{1 - 2}} = \\ &= \frac{\frac{11}{3} - \frac{11}{3}}{1 + \frac{11}{3} \cdot \frac{11}{3}} = 0 \end{aligned}$$

$\arctg\frac{1}{5} + \arctg 2 + \arctg 3 + \arctg\frac{2}{3} = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Determinem el valor de k .

$$\operatorname{tg}\left(\arctg\frac{1}{5} + \arctg\frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 3}} = 1.$$

$$\arctg\frac{1}{5} + \arctg\frac{2}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\arctg 2 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \arctg 3 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

$$\text{Aleshores, } \arctg\frac{1}{5} + \arctg 2 + \arctg 3 + \arctg\frac{2}{3} \in \left]0, \frac{3\pi}{2}\right[$$

$$\text{Aleshores, } \arctg\frac{1}{5} + \arctg 2 + \arctg 3 + \arctg\frac{2}{3} = \pi.$$

162.- Resoleu la següent equació $(x + 3\sqrt{x} + 2)(x + 9\sqrt{x} + 18) = 168x$.

Mathscope 259.1

Solució:

Notem que $x \geq 0$.

Efectuem el canvi $y = \sqrt{x}$.

$$(y^2 + 3y + 2)(y^2 + 9y + 18) = 168y^2.$$

$$y^4 + 12y^3 - 121y^2 + 72y + 36 = 0.$$

Factoritzant l'equació amb la regla de Ruffini:

$$(y - 1)(y - 6)(y^2 + 19y + 6) = 0.$$

Desfent el canvi:

$$(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 6)(x + 19\sqrt{x} + 6) = 0.$$

Notem que si $x \geq 0$ aleshores $x + 19\sqrt{x} + 6 > 0$.

Aleshores,

$$\sqrt{x} - 1 = 0, \text{ per tant, } x = 1.$$

$$\sqrt{x} - 6 = 0, \text{ per tant, } x = 36.$$

163.- Si $a \geq 0, b \geq 0$ demostreu que $a^3 - 3ab^2 + 2b^3 \geq 0$.

Kömal C1011, desembre 2009

Solució:

Suposem $a = 0$, $a^3 - 3ab^2 + 2b^3 = 2b^3 \geq 0$.

La igualtat s'assoleix quan $b = 0$.

Suposem que $b = 0$, $a^3 - 3ab^2 + 2b^3 = a^3 \geq 0$.

La igualtat s'assoleix quan $a = 0$.

Suposem que $a > 0, b > 0$.

Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i la geomètrica:

$$a^3 + 2b^3 = a^3 + b^3 + b^3 \geq 3\sqrt[3]{a^3b^3b^3} = 3ab^2.$$

$$a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2.$$

$$a^3 - 3ab^2 + 2b^3 \geq 0.$$

La igualtat s'assoleix quan $a^3 = b^3 = b^3$, és a dir, quan $a = b$.

164.- Suposem que a, b i c són tres nombres reals positius. Suposem, a més a més, que $a^n + b^n = c^n$ per a un cert nombre natural $n, n \geq 2$.

Demostreu que si k en un natural $1 \leq k < n$, aleshores, a^k, b^k, c^k són les longituds dels costats d'un triangle.

Crux Mathematicorum M400.

Solució:

$a, b, c > 0$, $a^n + b^n = c^n$, aleshores:

$a^n < c^n$, $b^n < c^n$.

Per ser la funció $f(x) = x^n$ $x \in]0, +\infty[$ estrictament creixent:

$a < c$, $b < c$.

Siga $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < n$.

$a^k < c^k$, $b^k < c^k$.

Suposem que $a^k + b^k \leq c^k$.

$n - k \geq 1$.

Aleshores:

$a^n + b^n < (a^k + b^k)^{n-k} \leq (c^k)^{n-k}$.

Aleshores, $a^n + b^n < c^n$, la qual cosa és absurda.

Per tant, $a^k + b^k > c^k$, aleshores, a^k, b^k, c^k són les longituds dels costats d'un triangle i c^k és el costat major.

165.-

a) Siguen r, s i t les arrels de l'equació cúbica $w^3 - bw^2 + cw - d = 0$.

Determineu b, c i d en termes de r, s i t .

b) Suposem que a és un nombre real. Determineu totes les solucions del sistema d'equacions

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ xy + yz + zx = -1 \\ xyz = -a \end{cases}$$

Crux mathematicorum M398.

Solució:

a)

Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:

$$-(r + s + t) = -b$$

$$rs + st + tr = c$$

$$-rst = -d$$

Per tant:

$$b = r + s + t$$

$$c = rs + st + tr$$

$$d = rst$$

b)

Aplicant l'apartat a)

x, y, z són les solucions de l'equació cúbica: $w^3 - a \cdot w^2 - z + a = 0$.

Aplicant la regla de Ruffini les solucions de l'equació són:

$$w = 1, w = -1, w = a.$$

Les solucions del sistema són:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = a \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = a \\ z = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = a \end{cases}, \begin{cases} x = -1 \\ y = a \\ z = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = a \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = a \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

166.- Simplifiqueu

a) $\sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x}$.

b) $\sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x}$.

Solució:

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x} &= \sqrt{\sin^4 x + 4(1 - \sin^2 x)} + \sqrt{\cos^4 x + 4(1 - \cos^2 x)} = \\ &= \sqrt{\sin^4 x - 4 \sin^2 x + 4} + \sqrt{\cos^4 x - 4 \cos^2 x + 4} = \\ &= \sqrt{(2 - \sin^2 x)^2} + \sqrt{(2 - \cos^2 x)^2} = \\ &= 2 - \sin^2 x + 2 - \cos^2 x = \\ &= 3 \end{aligned}$$

Notem que $2 - \sin^2 x > 0$, $2 - \cos^2 x > 0$.

b)

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x} &= \sqrt{\sin^4 x + 4(1 - \sin^2 x)} - \sqrt{\cos^4 x + 4(1 - \cos^2 x)} = \\ &= \sqrt{\sin^4 x - 4 \sin^2 x + 4} - \sqrt{\cos^4 x - 4 \cos^2 x + 4} = \\ &= \sqrt{(2 - \sin^2 x)^2} - \sqrt{(2 - \cos^2 x)^2} = \\ &= 2 - \sin^2 x - (2 - \cos^2 x) = \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x = \\ &= \cos 2x \end{aligned}$$

167.- Resoleu el sistema $\begin{cases} xyz = 4104 \\ x + y + z = 77 \end{cases}$ en els nombres naturals.

Olimpiada argentina Mayo 2004.

Solució:

Si tenim una solució $(x = a, y = b, z = c)$ del sistema qualsevol permutació d'aquests valors serà també solució.

Notem que $1 \leq x, y, z \leq 75$.

$$4104 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 19$$

Una de les solucións ha de ser 19 o bé un múltiple de 19

El possibles múltiples de 19 menors que 75 són: 19, 38, 57

Suposem $z = 19$, aleshores, $\begin{cases} xy = 216 \\ x + y = 58 \end{cases}$ una solució d'aquest sistema és $\begin{cases} x = 4 \\ y = 54 \end{cases}$.

Aleshores també serien solució:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 54 \\ z = 19 \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 19 \\ z = 54 \end{cases}, \begin{cases} x = 19 \\ y = 4 \\ z = 54 \end{cases}, \begin{cases} x = 19 \\ y = 54 \\ z = 4 \end{cases}, \begin{cases} x = 54 \\ y = 4 \\ z = 19 \end{cases}, \begin{cases} x = 54 \\ y = 19 \\ z = 4 \end{cases}.$$

Suposem $z = 38$, aleshores, $\begin{cases} xy = 108 \\ x + y = 39 \end{cases}$ una solució d'aquest sistema és $\begin{cases} x = 3 \\ y = 36 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 36 \\ z = 38 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 38 \\ z = 36 \end{cases}, \begin{cases} x = 36 \\ y = 3 \\ z = 38 \end{cases}, \begin{cases} x = 36 \\ y = 38 \\ z = 3 \end{cases}, \begin{cases} x = 38 \\ y = 3 \\ z = 36 \end{cases}, \begin{cases} x = 38 \\ y = 36 \\ z = 3 \end{cases}.$$

Suposem $z = 57$, aleshores, $\begin{cases} xy = 72 \\ x + y = 20 \end{cases}$ aquest sistema no té solució natural.

168.- Siga $[x]$ part entera de x . Resoleu l'equació:

$$\left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{3}{x}\right] = 4.$$

Crux Mathematicorum M421.

Solució:

$$x \neq 0.$$

Suposem que $x < 0$.

$$\frac{1}{x} < 0, \frac{3}{x} < 0. \text{ Aleshores, } \left[\frac{1}{x}\right] < 0, \left[\frac{3}{x}\right] < 0.$$

$$\text{Aleshores, } \left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{3}{x}\right] < 0.$$

Per tant, $x < 0$ no és solució de l'equació.

Suposem que $x \geq 3$.

$$0 < \frac{1}{x} < 1, 0 < \frac{3}{x} \leq 1. \text{ Aleshores, } \left[\frac{1}{x}\right] = 0, \left[\frac{3}{x}\right] \leq 1.$$

$$\text{Aleshores, } \left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{3}{x}\right] \leq 1.$$

Per tant, $x \geq 3$ no és solució de l'equació.

Suposem $1 < x < 3$.

$$0 < \frac{1}{x} < 1, 0 < \frac{3}{x} < 3. \text{ Aleshores, } \left[\frac{1}{x}\right] = 0, \left[\frac{3}{x}\right] < 3.$$

$$\text{Aleshores, } \left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{3}{x}\right] < 3.$$

Per tant, $1 < x < 3$ no és solució de l'equació.

Suposem $0 < x \leq 1$.

$$\frac{1}{x} \geq 1, \frac{3}{x} \geq 3.$$

$$\left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{3}{x}\right] = 4.$$

A fi que l'equació tinga solució $2 > \frac{1}{x} \geq 1$ $4 > \frac{3}{x} \geq 3$.

$$x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

169.- Siga $\{a_n\}$ una successió geomètrica i de Fibonacci. Calculeu la raó de proporcionalitat.

Solució:

Siga r la raó de proporcionalitat de la successió $\{a_n\}$.

Suposem que la successió és distinta de la trivial $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r \neq 0$.

Si $\{a_n\}$ és una successió de Fibonacci, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (1)

Per ser $\{a_n\}$ una successió geomètrica de raó r :

$$a_{n+1} = r \cdot a_n, \quad a_{n+2} = r^2 \cdot a_n \quad (2)$$

Substituint les expressions (2) en l'expressió (1):

$$r^2 \cdot a_n = r \cdot a_n + a_n, \quad a_n \neq 0.$$

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

$$\text{Aleshores, } r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi, \text{ o bé, } r = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}.$$

$$170.- \text{ Resoleu el sistema } \begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \sin x + \sin y + \sin z = \frac{3}{2} \end{cases} .$$

Kömal març 2010. B4260.

Solució:

Suposem que $x, y, z \in [0, 2\pi[$

Elevem al quadrat les dues equacions:

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + 2(\cos x \cdot \cos y + \cos x \cdot \cos z + \cos y \cdot \cos z) = \frac{27}{4} .$$

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z + 2(\sin x \cdot \sin y + \sin x \cdot \sin z + \sin y \cdot \sin z) = \frac{9}{4}$$

Sumant les dues expressions:

$$3 + 2(\cos(x - y) + \cos(x - z) + \cos(y - z)) = 9 .$$

Simplificant:

$$\cos(x - y) + \cos(x - z) + \cos(y - z) = 3, \quad \cos(x - y), \cos(x - z), \cos(y - z) \in [-1, 1]$$

Aleshores, $\cos(x - y) = 1, \cos(x - z) = 1, \cos(y - z) = 1$.

Per tant:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} . \text{ Aleshores, } x = y = z .$$

Substituint en la primera equació del sistema:

$$3 \cos x = \frac{3\sqrt{3}}{2} .$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

$$x = \frac{\pi}{6} .$$

Les solucions del sistema són:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k' \\ z = \frac{\pi}{6} + 2\pi k'' \end{cases}, \quad k, k', k'' \in \mathbb{Z} .$$