Problemes d'àlgebra 18

171.- Resoleu el sistema en els conjunt dels nombres reals $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x \\ \dfrac{1+y^2}{1+x^2}=5 \end{cases}$.

KöMaL. B4263. Abril 2010.

Solució:

$$\begin{cases} x(x^2-16)=y(y^2-4) \\ y^2-4=5x^2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x(x^2-16)=5yx^2 \\ y^2-4=5x^2 \end{cases}.$$

Si $x=0$, $y^2-4=0$. Aleshores, $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$.

Si $x\neq 0$, simplificant la primera equació

$$\begin{cases} x^2-16=5yx \\ y^2-4=5x^2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2-16}{5x} \\ y^2-4=5x^2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2-16}{5x} \\ \left(\dfrac{x^2-16}{5x}\right)^2-4=5x^2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2-16}{5x} \\ 31x^4+33x^2-64=0 \end{cases}.$$

Resolent la segona equació i substituint en la primera equació:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}, \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}.$$

Les altres solucions complexes són:

$$\begin{cases} x=\dfrac{8\sqrt{31}}{31}i \\ y=\dfrac{14\sqrt{31}}{31}i \end{cases}, \begin{cases} x=-\dfrac{8\sqrt{31}}{31}i \\ y=-\dfrac{14\sqrt{31}}{31}i \end{cases}.$$

172.- Siguen x, y nombres reals tal que $x+3y=12$ i $x\geq 2y\geq 0$. Entre quins valors està $x+2y$.

Kömal C1030. Abril 2010.

Solució:

Siga $f(x,y)=x+2y$.

$y=4-\frac{1}{3}x$.

$f(x)=x+2\left(4-\frac{1}{3}x\right)=\frac{1}{3}x+8$. Aquesta funció és una recta de pendent positiva el valor mínim s'assoleix en el valor mínim del domini, el valor màxim s'assoleix en el valor màxim del domini.

$x+3y-12=0$.

$x\geq 2y\geq 0$.

$x-12\leq 0$, aleshores, $x\leq 12$.

$x+3\frac{x}{2}-12\geq 0$, aleshores, $x\geq\frac{24}{5}$.

Aleshores, $x\in\left[\frac{24}{5},12\right]$.

Aleshores, $f\left(\frac{24}{5}\right)\leq x+2y\leq f(12)$.

$f\left(\frac{24}{5}\right)=\frac{48}{5}$, $f(12)=12$.

$\frac{48}{5}\leq x+2y\leq 12$.

173.- Siga $x, y, z > 0$ tal que $x + y + z = 1$.

Determineu el màxim de la funció $E(x, y, z) = \frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x}$.

Mathematical reflections J169.

Solució:
Aplicant la desigualtat entre la mitjana harmònica i l'aritmètica.

$\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \le \frac{1}{2}\frac{x+y}{2}$, la igualtat s'assoleix quan $x = y$.

$$E(x, y, z) = \frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} \le \frac{1}{2}\frac{x+y}{2} + \frac{1}{2}\frac{y+z}{2} + \frac{1}{2}\frac{z+x}{2} = \frac{1}{2}\frac{2(x+y+z)}{2} = \frac{1}{2}.$$

La igualtat s'assoleix quan $x = y = z$, és a dir, quan $x = y = z = \frac{1}{3}$.

174.- La funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in R$ té almenys 2 zeros reals, proveu que $a^2 > 3b$.
Kömal C1073.

Solució:
Siguen r_1, r_2 dos zeros reals distints de $f(x)$.
Siga r_3 el tercer zero.

Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:
$a = -(r_1 + r_2 + r_3)$
$b = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3$
$c = -r_1 r_2 r_3$

De la primera igualtat es dedueix que $r_3 \in R$.

a) Suposem que $r_1 = 0, r_2 \neq 0$
Aleshores, $c = 0$.
$f(x) = x^3 + ax^2 + bx = x\left(x^2 + ax + b\right)$
El polinomi $x^2 + ax + b$ té dos zeros reals aleshores:
$a^2 - 4b \geq 0$.
Si $b > 0$, $a^2 \geq 4b > 3b$.
Si $b < 0$, $a^2 > 3b$.
Si $b = 0$, aleshores, $a \neq 0$, per tant, $a^2 > 3b$.

b) Suposem que $r_1, r_2 \neq 0$
$a^2 = (r_1 + r_2 + r_3)^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)$.
$a^2 = (r_1 + r_2 + r_3)^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2b$.

$r_1^2, r_2^2 > 0$, $r_1^2 \neq r_2^2$. Aplicant la desigualtat en la mitjana aritmètica i geomètrica:
$r_1^2 + r_2^2 > 2r_1 r_2$.

$r_1^2 + r_3^2 \geq 2r_1 r_2$.
$r_1^2 + r_2^2 \geq 2r_1 r_2$.

Sumant les tres expressions:
$2\left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2\right) > 2(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)$.
$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 > b$.
Aleshores, $a^2 = (r_1 + r_2 + r_3)^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2b > b + 2b = 3b$.

175.- Si x, y són dos nombres reals diferents que compleixen
$2011x-\frac{2012}{x}=2011y-\frac{2012}{y}$, determineu el valor de $x\cdot y$.

Solució:

$2011x-\frac{2012}{x}=2011y-\frac{2012}{y}$.

$2011x-2011y=\frac{2012}{x}-\frac{2012}{y}$.

$2011(x-y)=2012\frac{y-x}{xy}$.

Aleshores, $x\cdot y=\frac{2012(y-x)}{2011(x-y)}$.

$xy=-\frac{2012}{2011}$.

176.- a) Si a i b són nombres reals tal que $\left|a-b^2\right|+a^2+a=0$. Demostreu que $a=b=0$.

b) Resoleu l'equació $\left|(2x-y)^2-3x-2y+7\right|+(3x+2y-7)^2+3x+2y=7$.

Olimpíada Bucarest (junior)

Solució:

a)

Si $\left|a-b^2\right|+a^2+a=0$, aleshores, $a^2+a\leq 0$.

Resolent la inequació: $a\in[-1,0]$.

Aleshores, $a\leq b^2$.

Suposem, $\left|a-b^2\right|=b^2-a$.

$\left|a-b^2\right|+a^2+a=0$ és equivalent:

$b^2-a+a^2+a=0$.

$b^2+a^2=0$.

Aleshores, $a=b=0$.

b)

$\left|(2x-y)^2-3x-2y+7\right|+(3x+2y-7)^2+3x+2y=7$.

$\left|3x+2y-7+(2x-y)^2\right|+(3x+2y-7)^2+3x+2y-7=0$.

Siga $a=3x+2y-7$, $b=2x-y$.

Aplicant l'apartat a):

$\begin{cases}3x+2y=0\\2x-y=0\end{cases}$. Resolent l'equació: $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$.

177.- Si a i b són dos nombres que verifiquen $-1 < a < 1$, $-1 < b < 1$,

Demostreu que $-1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1$.

Olimpíada Bucarest (junior).

Solució:

Si $-1 < a < 1$, $-1 < b < 1$ aleshores, $-1 < ab < 1$.

Aleshores, $0 < ab + 1 < 2$.

Si $-1 < a < 1$, $-1 < b < 1$, aleshores, $-2 < a - 1 < 0$, $-2 < b - 1 < 0$.

$(a-1)(b-1) > 0$.

$ab + 1 > a + b$.

Com que $ab + 1 > 0$.

$1 > \frac{a+b}{ab+1}$.

Si $-1 < a < 1$, $-1 < b < 1$, aleshores, $a + 1 > 0$, $b + 1 > 0$.

$(a+1)(b+1) > 0$.

$ab + 1 > -(a+b)$.

Com que $ab + 1 > 0$.

$1 > -\frac{a+b}{ab+1}$.

$-1 < \frac{a+b}{ab+1}$.

178.- Siga $a \geq b \geq c > 0$, proveu que $\frac{a^2-b^2}{c}+\frac{c^2-b^2}{a}+\frac{a^2-c^2}{b} \geq 3a-4b+c$.

KöMaL, B4364.

Solució:

$a \geq b > 0$ aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Com que $a \geq b \geq c > 0$.

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \sqrt{c^2}$.

$\frac{a+b}{c} \geq 2$, $a-b \geq 0$

Aleshores:

$$\frac{a^2-b^2}{c}=\frac{a+b}{c}(a-b) \geq 2(a-b) \qquad (1)$$

$$\frac{b^2-c^2}{a}=\frac{(b+c)(b-c)}{a} \leq \frac{(a+a)(b-c)}{a} \leq 2(b-c).$$

Aleshores:

$$\frac{c^2-b^2}{a} \geq 2(c-b) \qquad (2)$$

$a \geq b \geq c > 0$, per tant, $a+c \geq 2b$.

$\frac{a+c}{b} \geq 2$.

Aleshores:

$$\frac{a^2-c^2}{b} \geq \frac{a+c}{b}(a-c) \geq 2(a-c) \qquad (3)$$

Aplicant les relacions (1) (2) (3):

$$\frac{a^2-b^2}{c}+\frac{c^2-b^2}{a}+\frac{a^2-c^2}{b} \geq 2(a-b)+2(c-b)+2(a-c)=4a-4b \geq 3a-4b+c.$$

179.- Determineu tots els nombres positius x que verifiquen l'equació:

$2^x+2^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}=6$.

Revista OIM 42. OIM.

Solució:

La funció exponencial de base 2 és estrictament creixent.

Suposem que $x\geq 2$.

$2^x\geq 4$

$1+\frac{1}{\sqrt{x}}>1$, aleshores, $2^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}>2^1=2$.

Per tant, $2^x+2^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}>6$.

Aleshores, $0<x<2$.

Considerem la funció $f(x)=2^x+2^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$, $x\in\left]0,1\right]$ vegem que en aquest interval és estrictament decreixent.

La funció f(x) és contínua en $x\in\left]0,1\right]$ i derivable en $x\in\left]0,1\right[$

$$f'(x)=\ln 2\left(2^x+2^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}\right)\right)$$

Si $0<x<1$.

$2^x<2^1<2$.

$1+\frac{1}{\sqrt{x}}>2$, aleshores, $2^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}>2^2=4$.

$\frac{1}{2\sqrt{x^3}}>\frac{1}{2}$.

Aleshores, $2^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(\frac{-1}{2\sqrt{x^2}}\right)<4\left(\frac{-1}{2}\right)=-2$.

Per tant, $f'(x)=\ln 2\left(2^x+2^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}\right)\right)<\ln 2\left(2+4\left(\frac{-1}{2}\right)\right)<0$.

Aleshores la funció és estrictament decreixent en $x\in\left]0,1\right]$.

En aquest interval el mínim s'assoleix quan $x=1$.

$f(x)=2^x+2^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}<f(1)=2+2^2=6$, quan $x\in\left]0,1\right]$.

Considerem la funció $f(x)=2^x+2^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$, $x\in\left[1,2\right[$ vegem que en aquest interval és estrictament creixent.

La funció f(x) és contínua en $x\in\left[1,2\right[$ i derivable en $x\in\left]1,2\right[$

Si $1<x<2$.

$2^x>2^1>2$.

$1+\frac{1}{\sqrt{x}}<2$, aleshores, $2^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}<2^2=4$.

$\frac{1}{2\sqrt{x^3}} < \frac{1}{2}$.

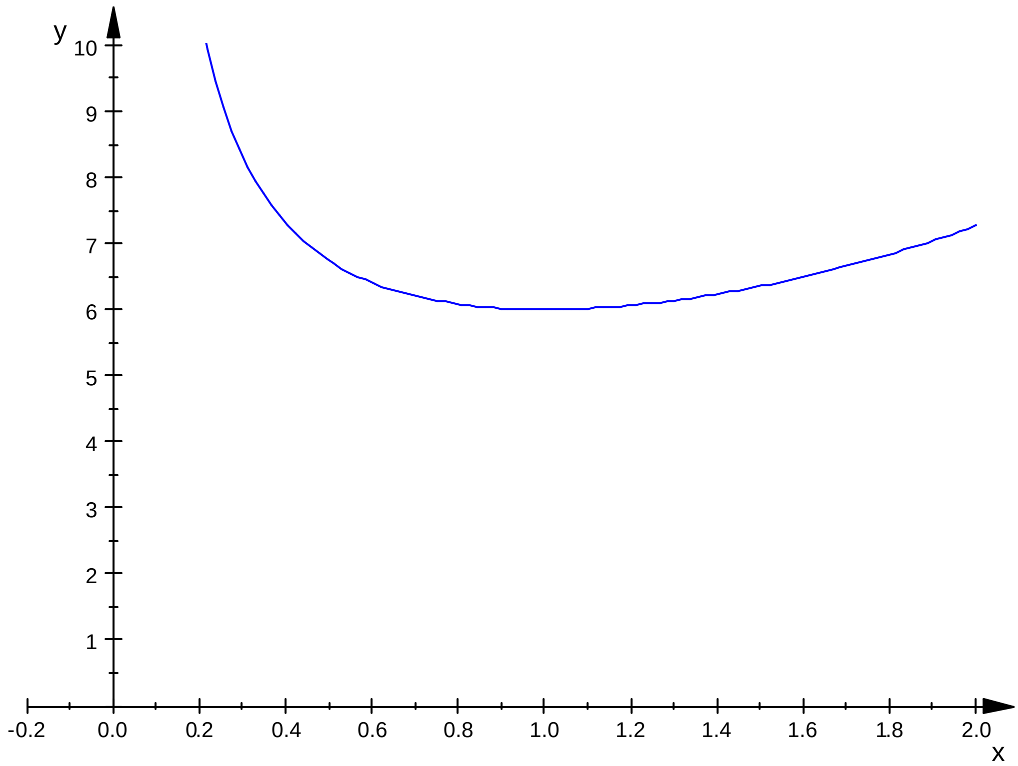
Aleshores, $2^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(\frac{-1}{2\sqrt{x^2}}\right) > 4\left(\frac{-1}{2}\right) = -2$.

Per tant, $f'(x) = \ln 2\left(2^x + 2^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}\right)\right) > \ln 2\left(2 + 4\left(\frac{-1}{2}\right)\right) > 0$.

Aleshores la funció és estrictament creixent en $x \in [1,2[$.
En aquest interval el mínim s'assoleix quan $x = 1$.

$f(x) = 2^x + 2^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} > f(1) = 2 + 2^2 = 6$, quan $x \in]0,1]$.

Aleshores, l'única solució de l'equació és $x = 1$.



$f(x) = 2^x + 2^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$

180.- Siga $a = 7 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 7^2 + ... + 6 \cdot 7^{2011}$.

Determineu x tal que $x^2 = a$.

Concurs Nacional Romania 2011. Junior.

Solució:

$$6 \cdot 7 + 6 \cdot 7^2 + ... + 6 \cdot 7^{2011} = 6\left(7 + 7^2 + 7^3 + ... + 7^{2011}\right) =$$

$$= 6 \cdot \frac{7 - 7^{2011} \cdot 7}{1 - 7} = -7 + 7^{2012}.$$

$$a = 7 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 7^2 + ... + 6 \cdot 7^{2011} = 7 + \left(-7 + 7^{2012}\right).$$

$$a = 7^{2012}.$$

$$x^2 = 7^{2012}$$

Resolent l'equació:

$$x = 7^{1006}, -7^{1006}.$$