11.- Si $\sin(b+c-a)$, $\sin(c+a-b)$, $\sin(a+b-c)$ formen una progressió aritmètica, aleshores, $\text{tg } a$, $\text{tg } b$, $\text{tg } c$ formen una progressió aritmètica.

Solució:
Si $\sin(b+c-a)$, $\sin(c+a-b)$, $\sin(a+b-c)$ formen una progressió aritmètica:

$$\sin(c+a-b)-\sin(b+c-a)=d$$
$$\sin(a+b-c)-\sin(c+a-b)=d$$

Transformant sumes en productes:

$$2\cdot\cos c\cdot\sin(a-b)=d$$
$$2\cdot\cos a\cdot\sin(b-c)=d$$

Igualant les dues expressions:

$$\cos c\cdot\sin(a-b)=\cos a\cdot\sin(b-c).$$

$$\sin(a-b)=\frac{\cos a\cdot\sin(b-c)}{\cos c} \qquad (1)$$

Calculem $\text{tg } b-\text{tg } a$:

$$\text{tg } b-\text{tg } a=\frac{\sin b}{\cos b}-\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{\sin b\cdot\cos a-\sin a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b}=\frac{\sin(b-a)}{\cos a\cdot\cos b}\underset{(1)}{=}$$

$$=\frac{\frac{-\cos a\cdot\sin(b-c)}{\cos c}}{\cos a\cdot\cos b}=\frac{-\sin(b-c)}{\cos b\cdot\cos c}=\frac{\sin(c-b)}{\cos b\cdot\cos c}=\text{tg } c-\text{tg } b.$$

Aleshores, $\text{tg } b-\text{tg } a=\text{tg } c-\text{tg } b$, per tant, $\text{tg } a$, $\text{tg } b$, $\text{tg } c$ formen una progressió aritmètica.

12.- Comproveu les següents igualtats:

a) $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}$.

b) $\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{5}\cdot\mathrm{tg}^2\frac{2\pi}{5}=5$.

Solució:

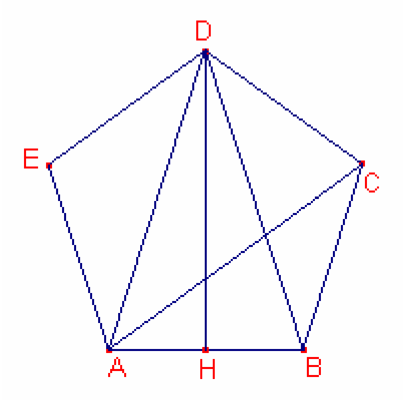
La proporció entre la diagonal d'un pentàgon regular i el costat és $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

Φ és arrel de l'equació $x^2-x-1=0$.

Per tant, $\Phi^2=1+\Phi$, $\Phi^{-1}=\Phi-1$.

Considerem el pentàgon regular ABCDE de costat $\overline{AB}=1$.

$\overline{AC}=\overline{AD}=\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Considerem el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\angle ABC=108^{\circ}=\frac{3\pi}{5}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1^2+1^2-\Phi^2}{2}=\frac{2-\Phi^2}{2}=\frac{1-\Phi}{2}.$$

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1^2+\Phi^2-1^2}{2\Phi}=\frac{\Phi^2}{2\Phi}=\frac{\Phi}{2}.$$

a)

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{\Phi}{2}+\frac{1-\Phi}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$\sin^2\frac{\pi}{5}=1-\cos^2\frac{\pi}{5}=1-\frac{\Phi^2}{4}=\frac{4-\Phi^2}{4}=\frac{3-\Phi}{4}.$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{5}=\frac{3-\Phi}{\Phi^2}=\frac{3-\Phi}{1+\Phi}.$$

Siga H el punt mig del costat $\overline{AB}$.

$\angle BAD=72^{\circ}=\frac{2\pi}{5}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHD}$:

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2\Phi}=\frac{\Phi-1}{2}. \quad \cos^2\frac{2\pi}{5}=\frac{\Phi^2+1-2\Phi}{4}=\frac{2-\Phi}{4}.$$

$$\sin^2\frac{2\pi}{5}=1-\cos^2\frac{2\pi}{5}=\frac{2+\Phi}{4}.$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{2\pi}{5}=\frac{2+\Phi}{2-\Phi}.$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{5}\cdot\mathrm{tg}^2\frac{2\pi}{5}=\frac{3-\Phi}{1+\Phi}\cdot\frac{2+\Phi}{2-\Phi}=\frac{6+3\Phi-2\Phi-\Phi^2}{2-\Phi+2\Phi-\Phi^2}=\frac{6+\Phi-1-\Phi}{2+\Phi-1-\Phi}=5.$$

13.- Un polinomi $p(x)$ de grau 2 amb coeficients reals és tal que tota permutació dels seus coeficients determina un polinomi amb les mateixes arrels que $p(x)$.
Calculeu les arrels de $p(x)$.

Solució 1:
Siga $p(x)=ax^2+bx+c$.
Notem que $x=0$ no és arrel de $p(x)$, ja que en tal cas també seria arrel del polinomi cx^2+bx+a, d'on resultaria que $a=0$ i aleshores $p(x)$ no seria de grau 2.
Aleshores, $c\neq 0$.
Vegem que $p(x)$ no té arrels dobles.
Si $x=r$ és una arrel doble de $p(x)$ tindríem que $p(x)=a(x-r)^2$.
$p(x)=ax^2-2arx+ar^2$.
Permutant el terme de grau 1 i el terme independent, $x=r$ seria arrel única del polinomi ax^2+ar^2x-2ar, per tant,
$ar^2+ar^3-2ar=0$.
$ar\left(r+r^2-2\right)=0$, on $ar\neq 0$. Aleshores,
$r^2+r-2=0$.
$r=1,-2$. Aleshores ax^2+ar^2x-2ar tindria dues solucions

En conseqüència $p(x)$ té dues solucions distintes.
En particular $p(x)$ té una arrel $x=\alpha\neq 1$.
Per hipòtesi $x=\alpha$ és arrel dels polinomis amb coeficients permutats:
$a\alpha^2+b\alpha+c=0$
$b\alpha^2+a\alpha+c=0$
$a\alpha^2+c\alpha+b=0$
Restant la segona de la primera:
$\alpha(\alpha-1)(a-b)=0$, $\alpha\neq 0, \alpha-1\neq 0$. Aleshores, $a=b$.
Restant la tercera de la primera:
$(\alpha-1)(b-c)=0$, $\alpha-1\neq 0$. Aleshores, $b=c$.
Aleshores, $a=b=c$.
$p(x)=ax^2+ax+a=a(x^2+x+1)$.
$p(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+x+1=0$.
Les seues arrels són:
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}.$$

Solució 2:
Siga Siga $p(x)=ax^2+bx+c$
$a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$ ja que en cas contrari alguna de les permutacions no seria un polinomi de segon grau.
Siguen r, s arrels de p(x) aleshores aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:
$$r+s=\frac{-b}{a}$$
Siga $q(x)=ax^2+cx+b$ polinomi permutat de l'anterior, r i s són també arrels d'aquest polinomi aleshores:

$r+s=\frac{-c}{a}$

Igualant, arribem a que $b=c$ en les altres permutacions arribaríem a que $a=b$.

$p(x)=ax^2+ax+a=a(x^2+x+1)$.

$p(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+x+1=0$.

Les seues arrels són:

$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$.

14.- Siga $c > 0$. Considerem la successió:

$\sqrt{c}, \sqrt{1+\sqrt{c}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{c}}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Demostrem que convergeix al nombre d'or, $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Solució:

Nota: el nombre d'or $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ és arrel positiva de l'equació $x^2 - x - 1 = 0$.

A més es verifica que si $x \geq \Phi$, $x^2 - x - 1 \geq 0$.

si $0 < x < \Phi$, $x^2 - x - 1 < 0$.

Siga x_n el terme n-èsim de la successió.

La successió està definida per recurrència de la forma següent:

$x_1 = \sqrt{c}$, $(x_{n+1})^2 = 1 + x_n$.

Distingirem dos casos:

a) Suposem que $\sqrt{c} < \Phi$.

Provem que la successió està afitada superiorment per Φ. Ho provarem per inducció:

$x_1 = \sqrt{c} < \Phi$.

Suposem que $x_n < \Phi$.

$(x_{n+1})^2 = 1 + x_n < 1 + \Phi = \Phi^2$, aleshores, $x_{n+1} < \Phi$.

Vegem que la successió és monòtona creixent:

$(x_n)^2 - (x_{n+1})^2 = (x_n)^2 - x_n - 1 < 0$.

$(x_n)^2 < (x_{n+1})^2$.

$x_n < x_{n+1}$.

Aleshores, la successió $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ té límit.

Siga $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = a$.

Calculant límits a l'expressió $(x_{n+1})^2 = 1 + x_n$.

$a^2 = 1 + a$.

Aleshores, $a = \Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) Suposem que $\sqrt{c} \geq \Phi$

Provem que la successió està afitada inferiorment per Φ. Ho provarem per inducció:

$x_1 = \sqrt{c} \geq \Phi$.

Suposem que $x_n \geq \Phi$.

$(x_{n+1})^2 = 1 + x_n \geq 1 + \Phi = \Phi^2$, aleshores, $x_{n+1} < \Phi$.

Vegem que la successió és monòtona creixent:

$(x_n)^2 - (x_{n+1})^2 = (x_n)^2 - x_n - 1 \geq 0$.

$(x_n)^2 \geq (x_{n+1})^2$. $x_n > x_{n+1}$.

Aleshores, la successió $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ té límit. Siga $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = a$.

Calculant límits a l'expressió $(x_{n+1})^2 = 1 + x_n$. $a^2 = 1 + a$.

Aleshores, $a = \Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

15.- Determineu tots els valors reals de p a fi que les arrels de l'equació $(p-3)x^2-2px+6p=0$ siguen reals i positives.

Solució 1:
$p-3\neq 0$, en cas contrari l'equació seria de primer grau.
$6p\neq 0$ en cas contrari $x=0$ seria solució de l'equació.
El discriminant de l'equació de segon grau ha de ser positiu o igual a zero:
$4p^2-4\cdot(p-3)6p\geq 0$.
$5p^2-18p\leq 0$. Solució del qual és:
$p\in\left]0,\frac{18}{5}\right]$.
Les arrels de l'equació són:

$$x=\frac{2p+\sqrt{-20p^2+72p}}{2(p-3)}\qquad x=\frac{2p-\sqrt{-20p^2+72p}}{2(p-3)}.$$

Si $x=\dfrac{2p+\sqrt{-20p^2+72p}}{2(p-3)}>0$

Com que $2p+\sqrt{-20p^2+72p}>0$, aleshores, $p>3$.

$$x=\frac{2p-\sqrt{-20p^2+72p}}{2(p-3)}>0$$

$\begin{cases}2p>\sqrt{-20p^2+72p}\\ p-3>0\end{cases}$ la solució del qual és $p>3$.

$\begin{cases}2p<\sqrt{-20p^2+72p}\\ p-3<0\end{cases}$, en aquest cas la primera solució seria negativa.

Aleshores, l'equació $(p-3)x^2-2px+6p=0$ són reals reals i positives si $p\in\left]3,\frac{18}{5}\right]$.

Solució 2:
El discriminant de l'equació de segon grau ha de ser positiu o igual a zero:
$4p^2-4\cdot(p-3)6p\geq 0$.
$5p^2-18p\leq 0$. Solució del qual és:
$p\in\left]0,\frac{18}{5}\right]$.
Siguen les arrels x_1,x_2 a fi que siguen reals i positives quan

$x_1+x_2>0$, $\qquad x_1+x_2=\dfrac{2p}{p-3}>0$

$x_1\cdot x_2>0$, $\qquad x_1\cdot x_2=\dfrac{6p}{p-3}>0$

Resolent el sistema format per les dues inequacions:
$p\in\left]3,\frac{18}{5}\right]$.

16.- Demostreu que si $a^2 + b^2 + c^2 = bc + ac + ab$ on $a, b, c \in R$, aleshores, $a = b = c$.

Solució:
Multipliquem per 2 ambdues parts de la igualtat:

$2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 2(bc + ac + ab)$.

$2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - 2(bc + ac + ab) = 0$.

$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b + c)^2 = 0$.

Com $a, b, c \in R$, aleshores, $a = b = c$.

17.- Si m i n són les arrels de l'equació $ax^2+bx+c=0$, escriviu en forma reduïda l'equació les arrels de la qual són m^3 i n^3. (En funció de a, b, c).

Solució:

Si m i n són les arrels de l'equació $ax^2+bx+c=0$,

$ax^2+bx+c=a(x-m)(x-n)$. Aleshores,

$$\begin{cases} mn=\dfrac{c}{a} \\ m+n=-\dfrac{b}{a} \end{cases}.$$

Siga $x^2+dx+e=0$ l'equació les arrels de la qual són m^3 i n^3.

$x^2+dx+e=(x-m^3)(x-n^3)=0$

Aleshores, $e=m^3n^3=(mn)^3=\left(\dfrac{c}{a}\right)^3$.

$$d=-(m^3+n^3)=-(m+n)(m^2-mn+n^2)=-(m+n)\left(m^2+2mn+n^2-3mn\right)=$$

$$=-(m+n)\left((m+n)^2-3mn\right)=\frac{b}{a}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^2-3\frac{c}{a}\right).$$

Aleshores, l'equació demanada és:

$$x^2+\frac{b}{a}\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{3c}{a}\right)x+\frac{c^3}{a^3}=0.$$

18.-
a) Proveu que:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\dots}}}}.$$

b) Determineu per a quins valors naturals de a la fracció contínua és racional:

$$1+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{\dots}}}}.$$

Solució:
a)

Siga $x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\dots}}}}=1+\cfrac{1}{1+1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\dots}}}}$, aleshores, $x=1+\frac{1}{1+x}$.

$x^2-2=0$, Com $x>0$, la solució és $x=\sqrt{2}$.

b) Anàlogament:

Siga $x=1+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{\dots}}}}=1+\cfrac{1}{(a-1)+1+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{\dots}}}}$, aleshores, $x=1+\frac{1}{(a-1)+x}$.

Simplificant:

$x^2+(a-2)x-a=0$.

Les solucions de l'equació són:

$$x=\frac{-a+2\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$$

x és racional si a^2+4 és un quadrat perfecte $a\in N$:

$a^2+4=b^2$ on $b\in N$, $b>a$.

$b^2-a^2=4$.

$(b-a)(b+a)=4$.

Les úniques solucions possibles són $\begin{cases}b-a=2\\ b+a=2\end{cases}$ o $\begin{cases}b-a=1\\ b+a=4\end{cases}$.

Si $\begin{cases}b-a=2\\ b+a=2\end{cases}$, aleshores, $\begin{cases}a=0\\ b=2\end{cases}$ aleshores, $x=2$.

Si $\begin{cases}b-a=1\\ b+a=4\end{cases}$, aleshores, $\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ b=\frac{5}{2}\end{cases}$, que no seria solució del problema ja que $a\in N$.

19.- Proveu que $e^{\pi} > \pi^{e}$.

Solució:

Demostrem que $\ln\left(\frac{e^{\pi}}{\pi^{e}}\right) > 0$, el que suposarà que $\frac{e^{\pi}}{\pi^{e}} > 1$.

$\ln\left(\frac{e^{\pi}}{\pi^{e}}\right) = \pi - e \cdot \ln \pi$.

Considerem la funció:

$f(x) = x - e \cdot \ln x$, definida en $]0,+\infty[$, contínua i derivable en $]0,+\infty[$.

$f'(x) = 1 - \frac{e}{x}$.

La derivada s'anul·la en $x = e$

$f''(e) = \frac{1}{e} > 0$, aleshores, $x = e$ és un mínim,

Aleshores, $\ln\left(\frac{e^{\pi}}{\pi^{e}}\right) = f(\pi) > f(e) = 0$.

20.- Si a, b, c són reals positius, demostreu la desigualtat:
$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \geq 3(b-c)(a-b)$.

Solució:
$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \geq 3(b-c)(a-b)$ és equivalent a:
$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \geq 3(ab - b^2 - ac + bc)$.
$a^2 + c^2 + 2ac + 4b^2 - 4ab - 4bc \geq 0$.
$(a+c)^2 + 4b^2 - 4b(a+c) \geq 0$
$\left((a+c) - 2b\right)^2 \geq 0$. La qual cosa demostra la desigualtat inicial.

La igualtat s'assolirà quan $a + c - 2b = 0$.