

Problemes Àlgebra 2

11.- Si $\sin(b+c-a)$, $\sin(c+a-b)$, $\sin(a+b-c)$ formen una progressió aritmètica, aleshores, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg} b$, $\operatorname{tg} c$ formen una progressió aritmètica.

12.- Comproveu les següents igualtats:

a) $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$.

b) $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{5} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{5} = 5$.

13.- Un polinomi $p(x)$ de grau 2 amb coeficients reals és tal que tota permutació dels seus coeficients determina un polinomi amb les mateixes arrels que $p(x)$. Calculeu les arrels de $p(x)$.

14.- Siga $c > 0$. Considerem la successió:

$$\sqrt{c}, \sqrt{1+\sqrt{c}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{c}}}, \dots$$

Demostrem que convergeix al nombre d'or, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

15.- Determineu tots els valors reals de p a fi que les arrels de l'equació $(p-3)x^2 - 2px + 6p = 0$ siguin reals i positives.

16.- Demostreu que si $a^2 + b^2 + c^2 = bc + ac + ab$ on $a, b, c \in \mathbb{R}$, aleshores, $a = b = c$.

17.- Si m i n són les arrels de l'equació $ax^2 + bx + c = 0$, escriviu en forma reduïda l'equació les arrels de la qual són m^3 i n^3 . (En funció de a, b, c).

18.-

a) Proveu que:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

b) Determineu per a quins valors naturals de a la fracció contínua és racional:

$$1 + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \dots}}}}$$

19.- Proveu que $e^\pi > \pi^e$.

20.- Si a, b, c són reals positius, demostreu la desigualtat:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \geq 3(b-c)(a-b)$$