21.- Resoleu l'equació $\log_2 x = \log_4 (x+1)$

Solució:

Siga $\log_2 x = \log_4 (x+1) = y$.

$2^y = x$.

$4^y = x+1$.

$2^{2y} = x+1$.

$x = 2^y = \frac{2^{2y}}{2^y} = \frac{x+1}{x}$.

$x = \frac{x+1}{x}$. Resolent l'equació:

$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

22.- Siguen a, b nombres reals que satisfan $a^2+b^2=1$.

Proveu que $\left|a^2b+ab^2\right|\le\frac{\sqrt{2}}{2}$. Quan és dóna la igualtat?.

Solució:

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab\ge 0$.

Aleshores, $2ab\le a^2+b^2=1$, $ab\le\frac{1}{2}$.

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\ge 0$.

Aleshores, $ab\ge\frac{-1}{2}$.

Per tant, $|ab|\le\frac{1}{2}$.

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\le 1+2\frac{1}{2}=2$.

$|a+b|\le\sqrt{2}$.

$\left|a^2b+ab^2\right|=|ab|\cdot|a+b|\le\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

La igualtat s'obtindrà quan $|ab|=\frac{1}{2}$, $|a+b|=\sqrt{2}$.

Si $ab=\frac{1}{2}$, aleshores, $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=0$, aleshores, $a=b$.

Com $|a+b|=\sqrt{2}$, $|2a|=\sqrt{2}$, aleshores, $a=b=\frac{\pm\sqrt{2}}{2}$.

Si $ab=\frac{-1}{2}$, $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=1+2\frac{-1}{2}=0$, aleshores, $a=-b$.

En aquest cas $\left|a^2b+ab^2\right|=0$.

23.-

Calculeu $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+.........+n\binom{n}{n}$.

Solució:

$$S=0\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+.........+n\binom{n}{n} \qquad (1)$$

$$S=0\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}+2\binom{n}{n-2}+3\binom{n}{n-3}+.........+n\binom{n}{0}.$$

$$S=n\binom{n}{0}+(n-1)\binom{n}{1}+(n-2)\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+.........+0\binom{n}{n} \qquad (2)$$

Sumant les expressions (1) i (2):

$$2S=n\binom{n}{0}+n\binom{n}{1}+n\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+.........+n\binom{n}{n}.$$

$$2S=n\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+.........+\binom{n}{n}\right).$$

$2S=n\cdot 2^n$. Aleshores,

$$S=n\cdot 2^{n-1}.$$

24.- Resoleu l'equació:

$$x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}.$$

Solució:
Notem que $x\neq 0$, $x>0$.
Elevant al quadrat ambdues parts:

$$x^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)+\left(1-\frac{1}{x}\right)+2\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)}.$$

$$x^2=x+1-\frac{2}{x}+2\sqrt{x-1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

Multiplicant l'equació per $x\neq 0$:

$$x^3-x^2-x+2=2\sqrt{x^3-x^2-x+1}.$$

$$\left(x^3-x^2-x+1\right)-2\sqrt{x^3-x^2-x+1}+1=0.$$

$$\left(\sqrt{x^3-x^2-x+1}-1\right)^2=0.$$

$$\sqrt{x^3-x^2-x+1}=1.$$

$$x^3-x^2-x+1=1.$$

$$x(x^2-x-1)=0.$$

Com que $x\neq 0$, $x^2-x-1=0$. Aleshores, $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

La segona solució $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ no és solució de l'equació inicial ja que $x>0$.

Siga $\Phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\Phi^2=1+\Phi$, $\dfrac{1}{\Phi}=\Phi-1$.

Com provem que $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ el nombre d'or és solució de l'equació:

$$\sqrt{\Phi-\frac{1}{\Phi}}+\sqrt{1-\frac{1}{\Phi}}=\sqrt{\Phi-(\Phi-1)}+\sqrt{\frac{\Phi-1}{\Phi}}=1+\sqrt{\frac{1}{\Phi^2}}=1+\frac{1}{\Phi}=1+(\Phi-1)=\Phi.$$

25.- Siguen α,β,γ les arrels de l'equació, $x^3 - x - 1 = 0$.

Calculeu $\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha} + \dfrac{1+\beta}{1-\beta} + \dfrac{1+\gamma}{1-\gamma}$.

Solució:

$x^3 - x - 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \qquad (1)$

Igualant coeficients:

$\alpha+\beta+\gamma = 0$, $\quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = -1$, $\quad \alpha\beta\gamma = 1$.

Siga $S = \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha} + \dfrac{1+\beta}{1-\beta} + \dfrac{1+\gamma}{1-\gamma} = \dfrac{3-(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)+3\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} =$

$= \dfrac{3-0-(-1)+3\cdot 1}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} = \dfrac{7}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$.

Substituïm $x = 1$ en l'expressió (1):

$1^3 - 1 - 1 = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$.

Aleshores, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = -1$.

Per tant, $S = \dfrac{7}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} = \dfrac{7}{-1} = -7$.

26.- Siga A una matriu $n \times n$ tal que $A^2 - 3A + 2I = 0$, on I és la matriu identitat i 0 la matriu zero. Proveu que $A^{2k} - (2^k + 1)A^k + 2^k I = 0$ per a tot natural $k \geq 1$.

Solució:
Siguen $p(x)$, $q(x)$ polinomis.

Siga $f(x) = p(x) \cdot q(x)$.

$f(A) = p(A) \cdot q(A)$.

Siga $g(x) = x^{2k} - (2^k - 1)x^k + 2^k$.

Notem que $g(1) = 1^{2k} - (2^k - 1)1^k + 2^k = 0$, $g(2) = 2^{2k} - (2^k - 1)2^k + 2^k = 0$.

Aleshores, $g(x)$ és divisible per $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$.

Per tant, $g(x) = (x^2 - 3x + 2)q(x)$.

$g(A) = A^{2k} - (2^k + 1)A^k + 2^k I$.

$g(A) = (A^2 - 3A + 2I) \cdot q(A) = 0 \cdot q(A) = 0$.

Aleshores, $A^{2k} - (2^k + 1)A^k + 2^k I = 0$.

27.- Siguen u, v nombres reals tal que , u, v, uv són les arrels reals d'un polinomi de grau 3 amb coeficients racionals. Determineu en quins casos uv és racional.

Solució:

Siga $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ amb coeficients racionals tal que u, v, uv són les seues arrels. Aleshores,

$x^3 + ax^2 + bx + c = (x-u)(x-v)(x-uv)$. Igualant els coeficients:

$u + v + uv = -a$.

$uv + uv(u+v) = b$.

$u^2v^2 = -c$.

Multiplicant la primera igualtat per uv:

$-auv = (u+v)uv + u^2v^2$.

$-auv = b - c - uv$.

$uv(a-1) = c - b$.

Aleshores, uv és racional si $a \neq 1$, $uv = \dfrac{c-b}{a-1}$.

Si $a = 1$.

Per a ser uv racional $c = b$. Per tant, $p(x) = x^3 + x^2 + bx + b$.

Factoritzant el polinomi:

$p(x) = x^3 + x^2 + bx + b = (x+1)(x^2 + c)$.

Les arrels són $x = 1, \sqrt{-c}, -\sqrt{-c}$ per tant, $c \leq 0$.

$u = -1$, $v = \sqrt{-c}$, $uv = -\sqrt{-c}$ que és racional si $-c$ és un quadrat perfecte.

28.-

a) Proveu que els nombres reals $a_1 < a_2 < \ldots\ldots < a_n$ estan en progressió aritmètica si i només si $(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)\cdot\ldots\ldots\cdot(a_n - a_{n-1}) = \left(\dfrac{a_n - a_1}{n-1}\right)^{n-1}$.

b) Proveu que els nombres reals $0 < b_1 < b_2 < \ldots\ldots < b_n$ estan en progressió geomètrica si i només si $\dfrac{b_1}{b_n}\left(\dfrac{b_2}{b_1} + \dfrac{b_3}{b_2} + \ldots\ldots + \dfrac{b_n}{b_{n-1}}\right)^{n-1} = (n-1)^{n-1}$.

(Oposicions Balears 2005).

Solució:

a)

$(\Rightarrow)$

Si $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ estan en progressió aritmètica

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots\ldots\ldots = a_n - a_{n-1} = d$, $a_n - a_1 = (n-1)d$.

$(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)\cdot\ldots\ldots\cdot(a_n - a_{n-1}) = d^{n-1}$.

$$\left(\frac{a_n - a_1}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{(n-1)d}{n-1}\right)^{n-1} = d^{n-1}.$$

Aleshores, $(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)\cdot\ldots\ldots\cdot(a_n - a_{n-1}) = \left(\dfrac{a_n - a_1}{n-1}\right)^{n-1}$.

$(\Leftarrow)$

$a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n - a_{n-1} > 0$.

La mitjana aritmètica és major o igual que la mitjana geomètrica i coincideix si els nombres són iguals.

$$\frac{(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots\ldots\ldots + (a_n - a_{n+1})}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot(a_n - a_{n-1})}.$$

$$\frac{a_n - a_1}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot(a_n - a_{n-1})}.$$

Per hipòtesi $(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)\cdot\ldots\ldots\cdot(a_n - a_{n-1}) = \left(\dfrac{a_n - a_1}{n-1}\right)^{n-1}$.

Aleshores, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots\ldots\ldots = a_n - a_{n-1}$.

Aleshores, $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ estan en progressió aritmètica.

b)

$(\Rightarrow)$

Si $b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n$ positius estan en progressió geomètrica:

$\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{b_3}{b_2} = \ldots\ldots = \dfrac{b_n}{b_{n-1}} = r > 1$, $b_n = b_1 \cdot r^{n-1}$.

$$\frac{b_1}{b_n}\left(\frac{b_2}{b_1} + \frac{b_3}{b_2} + \ldots\ldots + \frac{b_n}{b_{n-1}}\right)^{n-1} = \frac{b_1}{b_1 \cdot r^{n-1}}(r + r + \ldots\ldots\ldots r)^{n-1} = \frac{1}{r^{n-1}}(n-1)^{n+1} r^{n-1} = (n-1)^{n-1}$$

($\Leftarrow$)

$\frac{b_2}{b_1}, \frac{b_3}{b_2}, ..., \frac{b_n}{b_{n-1}} > 0$.

La mitjana aritmètica d'aquests nombres positius és major o igual que la mitjana geomètrica, essent igual quan els nombres són iguals.

$$\frac{\frac{b_2}{b_1} + \frac{b_3}{b_2} + ... + \frac{b_n}{b_{n-1}}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{\frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot ..... \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}}} = \sqrt[n-1]{\frac{b_n}{b_1}}.$$

$$\left(\frac{b_2}{b_1} + \frac{b_3}{b_2} + ... + \frac{b_n}{b_{n-1}}\right)^{n-1} \geq \frac{b_n}{b_1}(n-1)^{n-1}.$$

Per hipòtesi:

$$\frac{b_1}{b_n}\left(\frac{b_2}{b_1} + \frac{b_3}{b_2} + ... + \frac{b_n}{b_{n-1}}\right)^{n-1} = (n-1)^{n-1}.$$

Aleshores, $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = ... = \frac{b_n}{b_{n-1}}$,

Per tant $b_1, b_2, ..., b_n$ estan en progressió geomètrica.

29.- Si $x+y+z>0$, proveu que $2 \le \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \le \sqrt{6}$.

Solució:

a)

$$2\sqrt{x^2+y^2+z^2} \le \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2} \quad \Leftrightarrow$$

(elevant al quadrat)

$$\Leftrightarrow 4(x^2+y^2+z^2) \le 2(x^2+y^2+z^2)+2\left[\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{z^2+x^2}+\sqrt{y^2+z^2}\sqrt{z^2+x^2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \le \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{z^2+x^2}+\sqrt{y^2+z^2}\sqrt{z^2+x^2}$$

Però,

$$x^2=\sqrt{x^2}\sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+z^2}.$$

$$y^2=\sqrt{y^2}\sqrt{y^2} \le \sqrt{y^2+x^2}\sqrt{y^2+z^2}.$$

$$z^2=\sqrt{z^2}\sqrt{z^2} \le \sqrt{z^2+x^2}\sqrt{z^2+y^2}.$$

sumant les expressions:

$$x^2+y^2+z^2 \le \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{z^2+x^2}+\sqrt{y^2+z^2}\sqrt{z^2+x^2}.$$

b)

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2} \le \sqrt{6}\sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \Leftrightarrow$$

(elevant al quadrat)

$$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2)+2\left[\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{z^2+x^2}+\sqrt{y^2+z^2}\sqrt{z^2+x^2}\right] \le 6(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{z^2+x^2}+\sqrt{y^2+z^2}\sqrt{z^2+x^2} \le 2(x^2+y^2+z^2)$$

La mitjana geomètrica és menor que la mitjana aritmètica, aleshores:

$$\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)} \le \frac{x^2+y^2+y^2+z^2}{2}$$

$$\sqrt{(x^2+y^2)(z^2+x^2)} \le \frac{x^2+y^2+z^2+x^2}{2}$$

$$\sqrt{(y^2+z^2)(z^2+x^2)} \le \frac{y^2+z^2+z^2+x^2}{2}$$

Sumant les tres expressions:

$$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{z^2+x^2}+\sqrt{y^2+z^2}\sqrt{z^2+x^2} \le 2(x^2+y^2+z^2).$$

30.- Determineu les arrels r_1, r_2, r_3, r_4 de l'equació $4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$, sabent que són reals positives i que $\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1$.
Determineu també, a, b, c.

Solució:

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = \frac{5}{4}.$$

Vegem que la mitjana aritmètica i geomètrica de $\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{4}, \frac{r_3}{5}, \frac{r_4}{8}$ coincideixen:

$$\frac{\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8}}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$\sqrt[4]{\frac{r_1}{2} \cdot \frac{r_2}{4} \cdot \frac{r_3}{5} \cdot \frac{r_4}{8}} = \sqrt[4]{\frac{\frac{5}{4}}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8}} = \frac{1}{4}.$$

Aleshores:

$$\frac{r_1}{2} = \frac{r_2}{4} = \frac{r_3}{5} = \frac{r_4}{8} = \frac{1}{4}.$$

$\frac{r_1}{2} = \frac{1}{4}$, aleshores, $r_1 = \frac{1}{2}$.

$\frac{r_2}{4} = \frac{1}{4}$, aleshores, $r_2 = 1$.

$\frac{r_3}{5} = \frac{1}{4}$, aleshores, $r_3 = \frac{5}{4}$.

$\frac{r_4}{8} = \frac{1}{4}$, aleshores, $r_4 = 2$.

$$4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)\left(x - \frac{5}{4}\right)(x-2).$$

$$4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 4x^4 - 19x^3 + \frac{63}{2}x^2 - \frac{43}{2}x + 5.$$

Aleshores:

$$a = 19, \quad b = \frac{63}{2}, \quad c = \frac{43}{2}.$$