

Problemes Àlgebra 3

21.- Resoleu l'equació $\log_2 x = \log_4(x+1)$

22.- Siguen a, b nombres reals que satisfan $a^2 + b^2 = 1$.

Proveu que $|a^2b + ab^2| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Quan és dóna la igualtat?.

23.-

Calculeu $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n}$.

24.- Resoleu l'equació:

$$x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$$

25.- Siguen α, β, γ les arrels de l'equació, $x^3 - x - 1 = 0$.

Calculeu $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$.

26.- Siga A una matriu $n \times n$ tal que $A^2 - 3A + 2I = 0$, on I és la matriu identitat i 0 la matriu zero. Proveu que $A^{2k} - (2^k + 1)A^k + 2^k I = 0$ per a tot natural $k \geq 1$.

27.- Siguen u, v nombres reals tal que u, v, uv són les arrels reals d'un polinomi de grau 3 amb coeficients racionals. Determineu en quins casos uv és racional.

28.-

a) Proveu que els nombres reals $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ estan en progressió aritmètica si i

només si $(a_2 - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) = \left(\frac{a_n - a_1}{n-1}\right)^{n-1}$.

b) Proveu que els nombres reals $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n$ estan en progressió geomètrica

si i només si $\frac{b_1}{b_n} \left(\frac{b_2}{b_1} + \frac{b_3}{b_2} + \dots + \frac{b_n}{b_{n-1}}\right)^{n-1} = (n-1)^{n-1}$.

(Oposicions Balears 2005).

29.- Si $x + y + z > 0$, proveu que $2 \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \leq \sqrt{6}$.

30.- Determineu les arrels r_1, r_2, r_3, r_4 de l'equació $4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$, sabent

que són reals positives i que $\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1$.

Determineu també, a, b, c.