31.- Resoleu el sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} ax+by+cz=a+b+c \\ bx+cy+az=a+b+c \\ cx+ay+bz=a+b+c \end{cases}$$ suposant que a, b, c són reals tals que $a+b+c\neq 0$.

Solució:
Aplicarem el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & a+b+c \\ b & c & a & a+b+c \\ c & a & b & a+b+c \end{array}\right)\sim$$ Sumant les 3 files:

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} a+b+c & a+b+c & a+b+c & 3(a+b+c) \\ b & c & a & a+b+c \\ c & a & b & a+b+c \end{array}\right)\sim$$ $a+b+c\neq 0$, dividim la 1 fila per $a+b+c\neq 0$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ b & c & a & a+b+c \\ c & a & b & a+b+c \end{array}\right)\sim$$ Substituïm la segona fila per bF_1-F_2
Substituïm la tercera fila per cF_1-F_3

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & b-c & b-a & 2b-a-c \\ 0 & c-a & c-b & 2c-a-b \end{array}\right)\sim$$ Substituïm la tercera fila per $(c-a)F_2-(c-b)F_3$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & b-c & b-a & 2b-a-c \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right) & \frac{1}{2}\left((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right) \end{array}\right)$$

Si $b-c\neq 0$ i $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\neq 0$ aleshores el sistema és compatible determinat.
El sistema inicial és equivalent a:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ (b-c)y+(b-a)z=2b-a-c \\ z=1 \end{cases}$$, resolent el sistema $\begin{cases} x=1 \\ y=1. \\ z=1 \end{cases}$

Si $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0$, aleshores, $a=b=c$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Els sistema és compatible indeterminat
El sistema inicial és equivalent a:
$x+y+z=3$
La solució del sistema és:

$$\begin{cases} x=3-\alpha-\beta \\ y=\beta \\ z=\alpha \end{cases}$$, on $\alpha,\beta\in R$.

32.- Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ x^2 + xz + z^2 = 4 \\ y^2 + yz + z^2 = 7 \end{cases}.$$

Solució:
Restant a la segona equació la primera:
$z^2 - y^2 + x(z-y) = 3$, aleshores,
$(z-y)(x+y+z) = 3$

Restant a la tercera equació la segona:
$y^2 - x^2 + z(y-x) = 3$, aleshores,
$(y-x)(x+y+z) = 3$
Dividint les dues expressions:
$z - y = y - x$ (1)
Podem escriure el sistema inicial:

$$\begin{cases} (x-y)^2 = 1 - 3xy \\ (x-z)^2 = 4 - 3xz \\ (y-z)^2 = 7 - 3yz \end{cases} \qquad (*)$$

De l'expressió (1) tenim que la primera i tercera equació es poden igualar. Per tant,
$1 - 3xy = 7 - 3yz$, aleshores,

$$z - x = \frac{2}{y} \qquad (2)$$

De (1) tenim que $z + x = 2y$ (3)
Resolent el sistema format per (2) i (3) en les incògnites x, z:

$$\begin{cases} x = y - \dfrac{1}{y} \\ z = y + \dfrac{1}{y} \end{cases}$$

Substituint l'expressió de x en la primera equació de (*):
$\left(y - \dfrac{1}{y} - y\right)^2 = 1 - 3y\left(y - \dfrac{1}{y}\right)$. Simplificant:
$3y^4 - 4y^2 + 1 = 0$, resolent l'equació: $y = -1, 1, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Aleshores,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \\ z = \dfrac{-4}{\sqrt{3}} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \dfrac{-2}{\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ z = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

Comprovant les solucions en el primer sistema totes les satisfan.

33.- Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ xy+xz+yz=27 \end{cases} .$$

Solució:

De la segona equació deduïm que $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$.

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$, $\dfrac{xy+xz+yz}{xyz}=1$, aleshores, $xyz=27$ (1)

De la primera equació: $x+y=9-z$ (2)

Multiplicant la tercera equació per z tenim que:

$27+xz^2+yz^2=27z$.

$27+z^2(x+y)=27z$, substituint l'expressió (2):

$27+z^2(9-z)=27z$.

$z^3-9z^2+27z-27=0$.

$(z-3)^3=0$.

Aleshores, $z=3$.

$\begin{cases} x+y=6 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$, la solució del qual és $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$.

La solució del sistema és:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=3 \\ z=3 \end{cases} .$$

34.- Resoleu les següents equacions:

a) $|x-2|+|x-1|=2$.

b) $|x-2|+|x-1|=1$

Solució:

Considerem la funció: $f(x)=|x-2|+|x-1|$

$$f(x)=\begin{cases} x-2+x-1 & \text{si } x\geq 2 \\ -(x-2)-(x-1) & \text{si } x\leq 1 \\ -(x-2)+(x-1) & \text{si } 1<x<2 \end{cases}$$. Simplificant:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{si } x\geq 2 \\ -2x+3 & \text{si } x\leq 1. \\ 1 & \text{si } 1<x<2 \end{cases}$$

a) Resolem l'equació en cadascun dels intervals i comprovem si la solució pertany o no a l'interval de definició de la funció:

$2x-3=2$, $x=\dfrac{5}{2}$, que si pertany a l'interval ja que $x\geq 2$.

$-2x+3=2$, $x=\dfrac{1}{2}$ que si pertany a l'interval ja que $x\leq 1$.

$1=2$, no té solució.

Aleshores les solucions de l'equació són $x=\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}$.

b) Anàlogament:

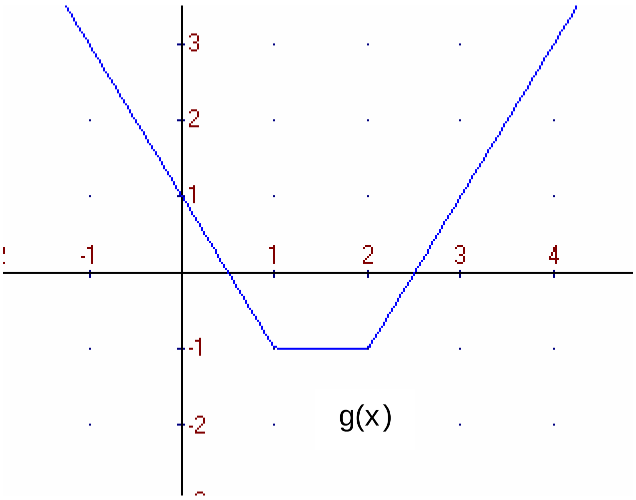
$2x-3=1$, $x=2$, que si pertany a l'interval ja que $x\geq 2$.

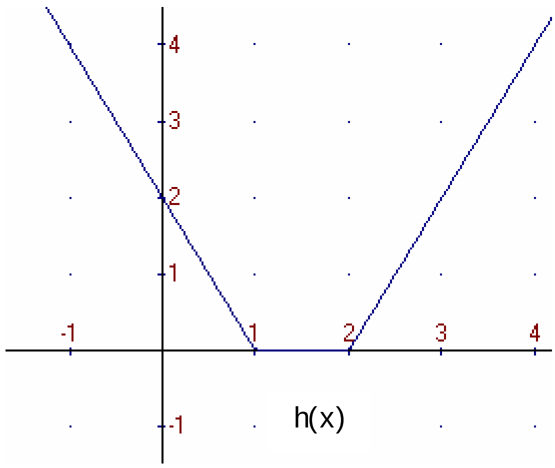
$-2x+3=1$, $x=1$ que si pertany a l'interval ja que $x\leq 1$.

$1=1$ que té infinites solucions $x\in\,]1,2[$.

Aleshores, les solucions del l'equació són $x\in[1,2]$

Les gràfiques de les funcions $g(x)=|x-2|+|x-1|-2$, $h(x)=|x-2|+|x-1|-1$ són:





35.-

a) Si $x + y = 2$ i $x^3 + y^3 = 6$, calculeu $x^2 + y^2$.

b) Si la suma de dos nombres és e i el seu producte és 4. Calculeu el valor de la suma dels seus inversos.

Solució:

a)

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$6 = 2(x^2 - xy + y^2)$. Simplificant:

$x^2 - xy + y^2 = 3$ (1)

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

$2^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Simplificant:

$x^2 + 2xy + y^2 = 4$ (2)

Multiplicant l'expressió (1) per 2 i sumant-li l'expressió (2):

$3(x^2 + y^2) = 10$.

Aleshores, $x^2 + y^2 = \frac{10}{3}$.

b)

Siguen x, y els nombres; $x + y = 3$, $xy = 4$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy} = \frac{3}{4}$.

El problema també és pot resoldre resolent el sistema:

$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 4 \end{cases}$.

36.- Si $16x^2 - 12x + 1 = 0$, calculeu $J = \sqrt{\dfrac{256x^4 - 48x^2 + 1}{16x^2}}$.

Solució:

Tractarem de factoritzar $256x^4 - 48x^2 + 1$

$256x^4 - 48x^2 + 1 = (16x^2 - 1)^2 - 16x^2 = \left(16x^2 + 4x - 1\right)\left(16x^2 - 4x - 1\right)$

Restant als dos factors, $16x^2 - 12x + 1 = 0$:

$256x^4 - 48x^2 + 1 = \left(16x^2 + 4x - 1\right)\left(16x^2 - 4x - 1\right) = (16x - 2)(8x - 2) = 4(8x - 1)(4x - 1)$.

$256x^4 - 48x^2 + 1 = 4(8x - 1)(4x - 1) = 4\left(32x^2 - 12x + 1\right)$.

$256x^4 - 48x^2 + 1 = 4\left(32x^2 - 12x + 1\right) = 4\left(16x^2 - 12x + 1 + 16x^2\right) = 4 \cdot 16x^2$.

$$J = \sqrt{\frac{256x^4 - 48x^2 + 1}{16x^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 16x^2}{16x^2}} = \pm 2.$$

37.- Calculeu $M = \sin^2 1º + \sin^2 2º + \sin^2 3º + ... + \sin^2 89º + \sin^2 90º$.

Solució:

$M = \sin^2 1º + \sin^2 2º + \sin^2 3º + ... + \sin^2 89º + \sin^2 90º$.

Aplicant raons trigonomètriques d'angles complementaris $\sin\alpha = \cos 90º - \alpha$:

$M = \cos^2 89º + \cos^2 88º + \cos n^2 87º + ... + \cos^2 1º + \cos^2 0º$.

Sumant les dues expressions:

$2M = \left(\sin^2 1º + \cos^2 1º\right) + \left(\sin^2 2º + \cos^2 2º\right) + ... + \left(\sin^2 89º + \cos^2 89º\right) + \sin 90º + \cos^2 0º$.

$2M = 91$.

Aleshores:

$M = \dfrac{91}{2}$.

38.-

a) Calculeu $N = \log(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ..... \cdot 20) - \log(9!)$

b) Calculeu $P = a^k + b^t$, essent $k = \dfrac{1+\log_a b}{1+\log_b a}\log_b 5$, $t = \dfrac{1+\log_b a}{1+\log_a b}\log_a 55$

Solució:

a)

$$N = \log(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ..... \cdot 20) - \log(9!) = \log\left(\frac{2^{10}(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot 10)}{9!}\right) = \log\left(\frac{2^{10} \cdot 10!}{9!}\right) =$$

$$= \log(20^{10} \cdot 10) = 10\log 2 + \log 10 = 1 + 10\log 2\,.$$

b)

Aplicant el canvi de base de logaritmes, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

Aleshores,

$$k = \frac{1+\log_a b}{1+\log_b a}\log_b 5 = \frac{1+\dfrac{1}{\log_b a}}{1+\log_b a}\log_b 5 = \frac{1}{\log_b a}\log_b 5 = \log_a b \cdot \log_b 5\,.$$

Com que $a^{\log_a b} = b$:

$$a^k = a^{\log_a b \cdot \log_b 5} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b 5} = b^{\log_b 5} = 5\,.$$

$$t = \frac{1+\log_b a}{1+\log_a b}\log_a 55 = \frac{1+\dfrac{1}{\log_a b}}{1+\log_a b}\log_a 55 = \frac{1}{\log_a b}\log_a 55 = \log_b a \cdot \log_a 55$$

$$b^t = b^{\log_b a \cdot \log_a 55} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a 55} = a^{\log_a 55} = 55\,.$$

$$P = a^k + b^t = 5 + 55 = 60\,.$$

39.- Demostreu que si $\cos(\alpha+\beta)=0$ aleshores $\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha$.

Solució:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+2\beta) &= \sin(\alpha+\beta+\beta) = \sin(\alpha+\beta)\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)\sin\beta = \\
&= \sin(\alpha+\beta)\cos\beta = \\
&= \cos(90^{\circ}-(\alpha+\beta))\cos\beta = \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos(90-\alpha)+\cos(90^{\circ}-(\alpha+2\beta))\right) = \\
&= \frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin(\alpha+2\beta)
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2}\sin(\alpha+2\beta)=\frac{1}{2}\sin\alpha$.

Per tant,

$\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha$.

40.- Si $\sin\alpha = A\cdot\sin(\alpha+\beta)$ i $\alpha+\beta \neq 90º+180º k$, $\forall k \in Z$, aleshores,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin\beta}{\cos\beta - A}.$$

Solució:

$\sin\alpha = \sin(\alpha+\beta-\beta) = \sin(\alpha+\beta)\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)\sin\beta$.

Dividint l'expressió per $\cos(\alpha+\beta) \neq 0$.

$$\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} - \sin\beta.$$

$$\frac{A\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\cos\beta - \sin\beta.$$

$A\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \cos\beta\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \sin\beta$.

Aïllant de l'expressió $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin\beta}{\cos\beta - A}.$$