41.- Es considera el conjunt, diguem-li M, de les matrius 3×3 els elements de les quals són $+1$, o -1. Es demana:
a) El cardinal de M.
b) Proveu que el determinant de cadascuna d'aquestes matrius és múltiple de 4.
c) Determineu el conjunt $B=\{\det A \,/\, A\in M\}$.
Oposicions Balears 2005.

Demostració:
a)
Cada element de la matriu està format per $+1$, o -1.
Com hi ha 9 elements en la matriu el cardinal de M és:
$\operatorname{car}M=2^9$.

b)
Els vectors de dimensió 2 els elements dels quals són $+1$, o -1, són els següents:
$(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$
Notem que si dos vectors d'aquests són L.I. qualsevol altre depén només d'un d'ells.

Considerem les dues primeres files d'una matriu A del conjunt M.
Pot passa que siguen L.D. o que siguen L.I.
1.-
Si són linealment dependents aleshores, $\det(A)=0$, per tant $\det(A)$ és múltiple de 4.
2.-
Si són linealment independents.
Considerem la submatriu formada per les 2 primeres columnes.
Podem suposat (sense perdre generalitat) que el primer menor és distint de zero.
Aleshores, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\pm 2$.
Aleshores la tercera columna depén només d'una de les 2 primeres columnes.
Sense perdre generalitat suposem que depén de la segona.
Aleshores la columna tercera (de la submatriu) és igual a la segona o és oposada de la segona.

Si a la tercera columna de A li restem o sumem la 2ª columna quedarien zeros en els elements a_{13}, a_{23}. L'element a_{33} només pot ser 0, $2, -2$.

Desenvolupant el determinant per la tercera columna:
$$\det(A)=a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{cases} 0 & \text{si } a_{33}=0 \\ (\pm 2)(\pm 2) & \text{si } a_{33}\neq 0 \end{cases}.$$

$\det(A)=0, \pm 4$. Aleshores, $\det(A)$ és múltiple de 4.

c)
Siga $B=\{\det A \,/\, A\in M\}$.
Per l'apartat b).
$B=\{0, 4, -4\}$.

42.- Calculeu $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}$.

Solució:

Resolem l'equació $n^3 + 6n^2 + 11n + 6 = 0$.

Les solucions són: $n = -1, -2, -3$.

$$\frac{1}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+3}.$$

Igualant els numeradors de les dues fraccions resultants:

$1 = A(n+2)(n+3) + B(n+1)(n+3) + C(n+1)(n+2)$.

Si $n = -1$, $1 = 2A$, aleshores, $A = \frac{1}{2}$.

Si $n = -2$, $1 = -B$, aleshores, $B = -1$.

Si $n = -3$, $1 = 2C$, aleshores, $C = \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6} = \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} - \frac{B}{n+2} + \frac{1}{2}\frac{C}{n+3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right).$$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{N(N+5)}{12(N+2)(N+3)}.$$

43.- Demostreu que $\sin\alpha\cdot\sin2\alpha\cdot\sin3\alpha<\frac{3}{4}$.

Demostració:

$$(\sin\alpha\cdot\sin2\alpha)\cdot\sin3\alpha=\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos3\alpha)\sin3\alpha=\frac{2\sin3\alpha\cos\alpha-2\sin3\alpha\cos3\alpha}{4}=$$

$$=\frac{\sin4\alpha+\sin2\alpha-\sin6\alpha\cos0}{4}=\frac{\sin4\alpha+\sin2\alpha-\sin6\alpha}{4}\leq\frac{3}{4}$$

La igualtat es té quan:

$\begin{cases}\sin4\alpha=1\\ \sin2\alpha=1\\ \sin6\alpha=-1\end{cases}$, si $\sin2\alpha=1$, $\cos2\alpha=0$, aleshores:

$\sin4\alpha=2\sin2\alpha\cos2\alpha=0$

Aleshores, $\sin\alpha\cdot\sin2\alpha\cdot\sin3\alpha<\frac{3}{4}$.

44.- Determineu les solucions enteres de l'equació $2^{2x}-3^{2y}=55$.

Solució:

$2^{2x}-3^{2y}=\left(2^x\right)^2-\left(3^y\right)^2=\left(2^x+3^y\right)\left(2^x-3^y\right)=55$.

$\left(2^x+3^y\right)\left(2^x-3^y\right)=55$.

$55=11\cdot 5=55\cdot 1$

Per tant:

$\begin{cases}2^x+3^y=11\\2^x-3^y=5\end{cases}$, o bé, $\begin{cases}2^x+3^y=55\\2^x-3^y=1\end{cases}$.

Resolem $\begin{cases}2^x+3^y=11\\2^x-3^y=5\end{cases}$,

$\begin{cases}2\cdot 2^x=16\\2^x+3^y=11\end{cases}$, $\begin{cases}2^{x+1}=2^4\\2^x+3^y=11\end{cases}$, $\begin{cases}x=3\\3^y=11-8\end{cases}$, $\begin{cases}x=3\\3^y=3\end{cases}$, $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$.

Resolem $\begin{cases}2^x+3^y=55\\2^x-3^y=1\end{cases}$,

$\begin{cases}2\cdot 2^x=54\\2^x+3^y=55\end{cases}$, $\begin{cases}2^{x+1}=54\\2^x+3^y=55\end{cases}$, $\begin{cases}x=-1+\dfrac{\log 54}{\log 2}\notin Z\\2^x+3^y=55\end{cases}$.

45.- Resoleu l'equació $\frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1} = a$ segons els valors de a.

Solució:
a) Si $a = 0$

$x^2 - x + 2 = 0$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} \notin R$.

b) Si $a \neq 0$.

$(a-1)x^2 + x + (a-2) = 0$.

b1) Si $a = 1$, aleshores l'equació és de primer grau, $x = 1$.

b2) $a \neq 0,1$

El discriminant de l'equació de segon grau és:

$\Delta = 1^2 - 4(a-1)(a-2)$.

L'equació té solució real si $1 - 4(a-1)(a-2) \geq 0$.

Resolem la inequació:

$-4a^2 + 12a - 7 \geq 0$

La solució és: $\frac{3-\sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{3+\sqrt{2}}{2}$.

És a dir, si $a \in \left[\frac{3-\sqrt{2}}{2}, \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right] \sim \{0,1\}$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-4a^2 + 12a - 7}}{2(a-1)}$.

L'enunciat d'aquest problema podria haver estat:

Determineu el valor màxim de la funció $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1}$.

El valor màxim hauria estat, $f(x) \leq \frac{3+\sqrt{2}}{2}$.

46.- Demostreu que amb la condició $2x+4y=1$ s'acompleix la desigualtat:
$x^2+y^2 \geq \frac{1}{20}$.

Solució:
$x=\frac{1-4y}{2}$, aleshores demostrar la desigualtat és equivalent a demostrar la següent desigualtat:

$$\left(\frac{1-4y}{2}\right)^2+y^2 \geq \frac{1}{20}$$

$\frac{1+16y^2-8y}{4}+y^2 \geq \frac{1}{20}$ eliminant denominadors:

$$100y^2-40y+4 \geq 0$$

$$25y^2-10y+1 \geq 0$$

El polinomi $25y^2-10y+1$ té un zero doble $y=\frac{1}{5}$:

$$25y^2-10y+1=25\left(y-\frac{1}{5}\right)^2 \geq 0$$

La igualtat es dona quan $y=\frac{1}{5}$, $x=\frac{1}{10}$.

47.- Resoleu el sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ x^5+y^5=31 \end{cases}$

Solució 1:

$x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$ aleshores:

$\begin{cases} x+y=1 \\ (x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)=31 \end{cases}$.

$\begin{cases} y=1-x \\ x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4=31 \end{cases}$. Resolent per substitució:

$\begin{cases} y=1-x \\ 5x^4-10x^3+10x^2-5x-30=0 \end{cases}$.

Resolent per Ruffini:

$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=\dfrac{1-\sqrt{11}\,i}{2} \\ y=\dfrac{1+\sqrt{11}\,i}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{11}\,i}{2} \\ y=\dfrac{1-\sqrt{11}\,i}{2} \end{cases}$

Solució 2:

Elevem la primera equació a la quinta potència i restant-li la segona equació ens queda:

$xy(x^3+y^3)+2x^2y^2+6=0$ (1)

Elevant la primera equació al cub queda:

$x^3+y^3=1-3xy$ (2)

Substituint l’expressió (2) en l’expressió (1):

$x^2y^2-xy-6=0$

Resolent l’equació en la incògnita xy:

$xy=3$, $xy=-2$.

$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=3 \end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases} x=\dfrac{1-\sqrt{11}\,i}{2} \\ y=\dfrac{1+\sqrt{11}\,i}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{11}\,i}{2} \\ y=\dfrac{1-\sqrt{11}\,i}{2} \end{cases}$.

$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

48.- Demostreu que:

a) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

b) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$

Solució:

a)

Siga $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$, siga $A=20+14\sqrt{2}$, $B=20-14\sqrt{2}$.

$AB=8$.

Elevem al cub:

$$x^3=\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^3.$$

$$x^3=\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)^3=A+3\sqrt[3]{A^2B}+3\sqrt[3]{AB^2}+B=A+B+3\sqrt[3]{AB}\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right).$$

$$x^3=20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}+3\sqrt[3]{8}x.$$

$$x^3=40+6x.$$

$$x^3-6x-40=0.$$

Resolent l'equació per Ruffini:

$x=4$, $x=-2+\sqrt{6}\,i$, $x=-2-\sqrt{6}\,i$.

Aleshores, $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

49.- Demostreu que $\left(\frac{1+n}{2}\right)^n \geq n! \quad \forall\, n \in N$.

Solució:

Si $a \geq 0, b \geq 0$, aleshores, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

$n \geq 0,\ \ 1 > 0$

$$\frac{n+1}{2} \geq \sqrt{n \cdot 1} \qquad (1)$$

Si $n-1 \geq 0,\ \ 2 > 0$ aleshores:

$$\frac{(n-1)+2}{2} \geq \sqrt{(n-1)\cdot 2} \qquad (2)$$

Si $n-2 \geq 0,\ \ 3 > 0$ aleshores:

$$\frac{(n-2)+3}{2} \geq \sqrt{(n-2)\cdot 3} \qquad (3)$$

....

....

Si $2 \geq 0,\ \ n-1 \geq 0$ aleshores:

$$\frac{2+(n-1)}{2} \geq \sqrt{2\cdot(n-1)} \qquad (n\text{-}1)$$

Si $1 \geq 0,\ \ n \geq 0$ aleshores:

$$\frac{1+n}{2} \geq \sqrt{1 \cdot n} \qquad (n)$$

Multiplicant les n desigualtats:

$$\left(\frac{1+n}{2}\right)^n \geq \sqrt{(n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot 2\cdot 1)(1\cdot 2\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot(n-1)\cdot n)}$$

$$\left(\frac{1+n}{2}\right)^n \geq \sqrt{n!\cdot n!}\ .$$

$$\left(\frac{1+n}{2}\right)^n \geq n!\ .$$

Notem que si $n \neq 1$, la desigualtat és estricta, $\left(\frac{1+n}{2}\right)^n > n!$.

50.- Demostreu que si $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$, aleshores $\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.

Demostració per reducció a l'absurd:

Suposem que $\frac{a+b+c}{3} > \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$. Elevem al quadrat ambdós membres:

$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 > \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$.

$(a+b+c)^2 > 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

$3\left(a^2+b^2+c^2\right)-(a+b+c)^2 < 0$.

$3\left(a^2+b^2+c^2\right)-(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) < 0$.

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc < 0$.

$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 < 0$ la qual desigualtat és absurda.

Per tant, $\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.