

## Problema Àlgebra 6

51.- Resoleu l'equació  $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$ . Oposicions Catalunya 2000.

52.- Calculeu la potència n-èsima de la matriu:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  (Oposicions Catalunya 2000)

53.- Demostreu que en l'equació  $x^2 + y^2 = z^2$  x i y no poden ser imparells.  
Oposicions Catalunya 1999.

54.- Determineu els nombres reals a, b sabent que les solucions de l'equació  $x^3 + bx^2 + cx = 0$  estan en progressió geomètrica.

55.- Resoleu l'equació  $2x^3 - 9x^2 + 32x + 75 = 0$  sabent que admet una arrel complexa (no real) de mòdul 5. Oposicions Catalunya 2000.

56.- Donat un nombre natural k, considerem la successió:

$$a_1 = \sqrt{k}, \quad a_2 = \sqrt{k + \sqrt{k}}, \quad a_3 = \sqrt{k + \sqrt{k + \sqrt{k}}}, \dots$$

Demostreu que  $a_n$  és convergent.

Calculeu  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l(k)$ , indiqueu quina condició compleixen els valors de k per als quals  $l(k)$  és enter. Oposicions Catalunya 1993.

57.- Siguen dues successions de nombres enters  $\{a_n\}$  i  $\{b_n\}$  tal que

$$(1 + \sqrt{2})^{2n+1} = a_n + b_n \sqrt{2}.$$

a) Demostreu que  $\{a_n\}$  i  $\{b_n\}$  són successions de nombres senars.

b) Demostreu que  $\{b_n\}$  és la hipotenusa d'un triangle de catets  $\frac{a_n + 1}{2}$ ,  $\frac{a_n - 1}{2}$ .

Oposicions Catalunya 2000.

58.- Considerem la successió de Fibonacci  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$   $n \geq 2$ .

Demostreu que es compleixen les següents relacions:

a)  $a_{n+2} = 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

b)  $a_n \cdot a_{n+1} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$

c)  $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2} + (-1)^n$

Oposicions Catalunya 1993.

59.- Siga  $0 < x_1 < y_1$  i definim per recurrència,  $x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$ ,  $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ .

a) Demostreu que  $x_1 < x_2 < \dots < x_n < y_n < \dots < y_2 < y_1$ .

b) Demostreu que ambdues successions convergeixen a un límit comú i calculeu-lo.

Oposicions Catalunya 1993.

60.- Resoleu el següent sistema d'equacions segons els valors de a:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ xy + yz + xz = a^2 \\ xyz = a^3 \end{cases}$$