

61.- Resoleu l'equació  $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = 1$

Solució:

$$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)$$

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = 1$$

$$\cos 2x \left( \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) \right) = 1$$

$$\cos 2x(2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x) = 2$$

$$2\cos^3 2x + \cos^2 2x - \cos 2x - 2 = 0$$

Fent el canvi,  $A = \cos 2x$ :

$$2A^3 + A^2 - A - 2 = 0.$$

Factoritzant amb la regla de Ruffini:

$$(A - 1)(2A^2 + 3A + 2) = 0.$$

Aleshores,  $A = 1$ ,  $2A^2 + 3A + 2 = 0$ , no té solucions reals.

Desfent el canvi:

$$\cos 2x = 1.$$

$$2x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Aleshores,  $x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

62.- Resoleu l'equació  $(x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 3x + 1) + 1 = x$ .

Solució 1:

Fent operacions:

$$x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Suposem que l'equació té 4 solucions reals. L'equació és podria factoritzar amb polinomis de segon grau:

Notem que el producte dels termes independents ha de ser  $-1$ .

El producte dels coeficients de segon grau és 1.

Suposem que:

$$(x^2 + ax + 1)(x^2 + bx - 1) = 0.$$

Fent operacions:

$$x^4 + (a+b)x^3 + abx^2 + (b-a)x - 1 = 0.$$

Igualant els coeficients del polinomi:

$$\begin{cases} a + b = -6 \\ ab = 8 \\ b - a = 2 \end{cases} \text{ . Resolent el sistema } \begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \end{cases} \text{ . (hem tingut molta sort, si el sistema no}$$

haguera tingut solució no voldria dir que el polinomi no s'hauria pogut factoritzar).

$$(x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0, \quad x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0, \quad x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Solució 2:

Sumem a les dues parts de la igualtat  $x^2 - 3x + 1$

$$(x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 3x + 1) + 1 + (x^2 - 3x + 1) = x + (x^2 - 3x + 1)$$

$$(x^2 - 3x + 1)^2 - 2(x^2 - 3x + 1) + 1 = x^2 - 2x + 1$$

completant quadrats:

$$((x^2 - 3x + 1) - 1)^2 = (x - 1)^2$$

$$(x^2 - 3x)^2 - (x - 1)^2 = 0$$

$$(x^2 - 3x + x - 1)(x^2 - 3x - x + 1) = 0$$

$$(x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0, \quad x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0, \quad x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

63.- Sabent que  $x + y = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 2$ , calculeu  $x^3 + y^3$ .

Solució 1:

$$1 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 2 + 2xy.$$

$$\text{Aleshores, } xy = \frac{-1}{2}.$$

$$1 = (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Aleshores,

$$x^3 + y^3 = 1 - 3xy(x + y).$$

$$x^3 + y^3 = 1 - 3\left(\frac{-1}{2}\right)1.$$

$$x^3 + y^3 = \frac{5}{2}.$$

Solució 2:

Si ho fem resolent el sistema és més llarg:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{El sistema té dues solucions: } \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Si } \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$x^3 + y^3 = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^3 + \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1 + 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3}}{8} + \frac{1 - 3\sqrt{3} + 9 - 3\sqrt{3}}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}.$$

64.- Determineu els valors de  $a$  tal que l'equació  $x^3 - 6x^2 + 11x + a - 6 = 0$  tinga 3 solucions enteres.

Problema de Crux Mathematicorum n26-8.

Solució:

Siguen  $p, q, r$  les solucions enteres de l'equació:

$$x^3 - 6x^2 + 11x + a - 6 = (x - p)(x - q)(x - r) = 0$$

$$(x - p)(x - q)(x - r) = x^3 - (p + q + r)x^2 + (pq + pr + qr)x - pqr .$$

Igualant coeficients dels polinomis:

$$\begin{cases} p + q + r = 6 \\ pq + pr + qr = 11 . \\ -pqr = a - 6 \end{cases}$$

$$(p + q + r)^2 = p^2 + q^2 + r^2 + 2(pq + pr + qr)$$

$$\text{Aleshores, } p^2 + q^2 + r^2 = (p + q + r)^2 - 2(pq + pr + qr) = 36 - 2 \cdot 11 = 14 .$$

$$\text{Aleshores, } -3 \leq p, q, r \leq 3 .$$

Com  $p + q + r = 6$ , les úniques possibilitats són  $\begin{cases} p = 1 \\ q = 2, \\ r = 3 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} p = 1 \\ q = 3, \\ r = 2 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} p = 2 \\ q = 1, \\ r = 3 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} p = 2 \\ q = 1, \\ r = 2 \end{cases}$ ,

$$\begin{cases} p = 3 \\ q = 1, \\ r = 2 \end{cases}, \begin{cases} p = 3 \\ q = 2 \\ r = 1 \end{cases}$$

Com  $-pqr = a - 6$  i en totes les 6 solucions,  $pqr = 6$ :

$$-6 = a - 6, \text{ aleshores, } a = 0 .$$

65.- Determineu a i b a fi que el polinomi  $p(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$  siga divisible per  $(x-1)^2$ .

Oposicions Extremadura 2002.

Solució:

Si  $p(x)$  és divisible per  $(x-1)^2$  aleshores,  $p(x) = (x-1)^2 q(x)$ .

$$p(1) = 0$$

$$p(1) = a \cdot 1^{n+1} + b \cdot 1^n + 1$$

$$\text{Igualant: } a + b = -1 \quad (1)$$

$$p'(x) = (n+1)ax^n + nbx^{n-1}.$$

$$p'(x) = 2(x-1)q(x) + (x-1)^2 q'(x) = (x-1)(2q(x) + (x-1)q'(x))$$

$$p'(1) = (n+1)a + nb$$

$$p'(1) = 0$$

$$\text{Igualant: } (n+1)a + nb = 0 \quad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) i (2)

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ a(n+1) + bn = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ (a+b)n + a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = n \\ b = -n - 1 \end{cases}$$

66.- Siga l'equació  $z^3 + (2i - 9)z^2 + (23 - 13i)z + 6(i - 5) = 0$  que té una arrel real. Els afixos de les arrels d'aquesta equació són tres vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram. Determineu el complex corresponents al quart vèrtex. Entre les possibles solucions escolliu la situada en el primer quadrant. Oposicions Cantàbria 2004.

Solució:

Siguem  $r$ ,  $a + bi$ ,  $c + di$  les arrels de l'equació:

$$(z - r)(z - (a + bi))(z - (c + di)) = 0.$$

Igualant els coeficients de les dues equacions:

$$-r(a + bi)(c + di) = 6(i - 5) \quad \text{Els termes independents.}$$

$$\begin{cases} -r(ac - bd) = -30 \\ -r(ad + bc) = 6 \end{cases} \quad \text{Igualant la part real i la part imaginària.}$$

$$r(a + bi) + r(c + di) + (a + bi)(c + di) = 23 - 13i \quad \text{Els coeficients de 1r grau.}$$

$$\begin{cases} ra + rc + ac - bd = 23 \\ rb + rd + ad + bc = -13 \end{cases} \quad \text{Igualant la part real i la part imaginària.}$$

$$-(r + (a + bi) + (c + di)) = 2i - 9 \quad \text{Els coeficients de 2n grau.}$$

$$\begin{cases} r + a + c = 9 \\ b + d = -2 \end{cases} \quad \text{Igualant la part real i la part imaginària.}$$

De l'equació (1)  $ac - bd = \frac{30}{r}$ .

De l'equació (5)  $a + c = 9 - r$ .

Substituint en l'equació (4):

$$r(9 - r) + \frac{30}{r} = 23. \text{ Simplificant:}$$

$$-r^3 + 9r^2 - 23r + 30 = 0$$

Resolent l'equació per Ruffini,  $r = 6$ .

Aplicant la regla de Ruffini a l'equació inicial i sabent que  $r = 6$  s una solució:

	1	$2i - 9$	$23 - 13i$	$6i - 30$
6		6	$-18 + 12i$	$30 - 6i$
	1	$-3 + 2i$	$5 - i$	0

L'equació inicial es pot factoritzar:

$$(z - 6)(z^2 + (-3 + 2i)z + 5 - i) = 0$$

Resolem l'equació  $z^2 + (-3 + 2i)z + 5 - i = 0$ .

$$z = \frac{3 - 2i \pm \sqrt{-15 - 8i}}{2} = \begin{cases} 1 + i \\ 1 - 3i \end{cases}$$

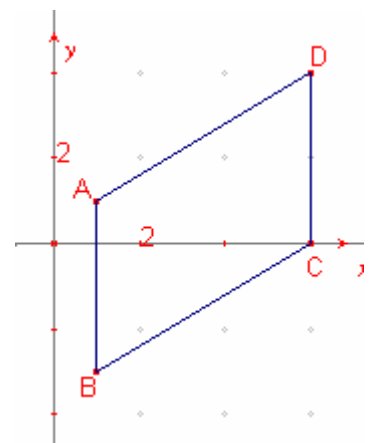
Siguem  $6, 1 + i, 1 - 3i$  els afixos del paral·lelogram.

Els vèrtex del paral·lelogram són  $A(1,1), B(1,-3), C(6,0)$ .

El vèrtex  $D(x, y)$  del paral·lelogram que està en el primer quadrant és

aquell que,  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .

$$(x - 1, y - 1) = (5, 3), \quad \begin{cases} x - 1 = 5 \\ y - 1 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}, \quad D(6, 4).$$



67.- Resoleu l'equació  $2^x + 2^{x+1} + \dots + 2^{x+2006} = 4^x + 4^{x+1} + \dots + 4^{x+2006}$ .

Solució:

$$2^x(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2006}) = 4^x(1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{2006}).$$

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2006} = \frac{1 - 2^{2007}}{1 - 2} = 2^{2007} - 1.$$

$$1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{2006} = \frac{1 - 4^{2007}}{1 - 4} = \frac{2^{4014} - 1}{3} = \frac{(2^{2007})^2 - 1}{3} = \frac{(2^{2007} + 1)(2^{2007} - 1)}{3}.$$

Aleshores l'equació quedaria:

$$2^x(2^{2007} - 1) = 2^{2x} \frac{(2^{2007} + 1)(2^{2007} - 1)}{3}.$$

Simplificant:

$$2^x = \frac{3}{2^{2007} + 1}.$$

Calculant logaritmes a les dues parts:

$$x = \frac{\log(3) - \log(2^{2007} + 1)}{\log(2)} \approx -2005'415037.$$

68.- Si  $a, b, c$  són les solucions de l'equació  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ , determineu l'equació les solucions de la qual són  $a^2, b^2, c^2$ .

Solució:

Si  $a, b, c$  són les solucions de l'equació  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ , aleshores:

$$(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

Igualant els coeficients dels polinomis:

$$\begin{cases} p = -(a + b + c) \\ q = ab + ac + bc \\ r = -abc \end{cases}$$

L'equació les solucions de la qual són  $a^2, b^2, c^2$  és:

$$(x - a^2)(x - b^2)(x - c^2) = 0. \text{ Desenvolupant:}$$

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x^2 + (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)x - a^2b^2c^2 = 0.$$

$$-a^2b^2c^2 = -(abc)^2 = -(-r)^2 = -r^2.$$

$$p^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = a^2 + b^2 + c^2 + 2q.$$

$$\text{Aleshores, } -(a^2 + b^2 + c^2) = 2q - p^2.$$

$$q^2 = (ab + ac + bc)^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2.$$

$$q^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c).$$

$$q^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2(-r)(-p).$$

$$\text{Aleshores, } a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2(-r)(-p) = q^2 - 2pr.$$

Per tant l'equació les solucions de la qual són és:

$$x^3 + (2q - p^2)x^2 + (q^2 - 2pr)x - r^2 = 0.$$

69.- Entre els nombres complexos  $z$  que satisfan la condició  $|z - 25i| \leq 15$  determineu el de menor argument.

Solució:

La resta de dos nombres complexos satisfà la llei del paral·lelogram, el mòdul de la diferència de dos nombres complexos és igual a la distància entre els afixos dels 2 complexos.

Aleshores, la condició  $|z - 25i| \leq 15$  la satisfan els punts del plànol complex que estan dins del cercle de centre  $25i$  i radi  $15$ .

El punt de menor argument és el punt de tangència (en el primer quadrant) de la recta que passa per l'origen de coordenades i és tangent a la circumferència.

Calculem el punt de tangència:

La circumferència té equació:  $x^2 + (y - 25)^2 = 15^2$

Siga la recta  $r \equiv y = mx$  tangent a la circumferència.

Els sistema format per la recta i la circumferència té solució única:

$$\begin{cases} x^2 + (y - 25)^2 = 15^2 \\ y = mx \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (mx - 25)^2 = 15^2 \\ y = mx \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 + m^2)x^2 + 50mx + 400 = 0 \\ y = mx \end{cases}$$

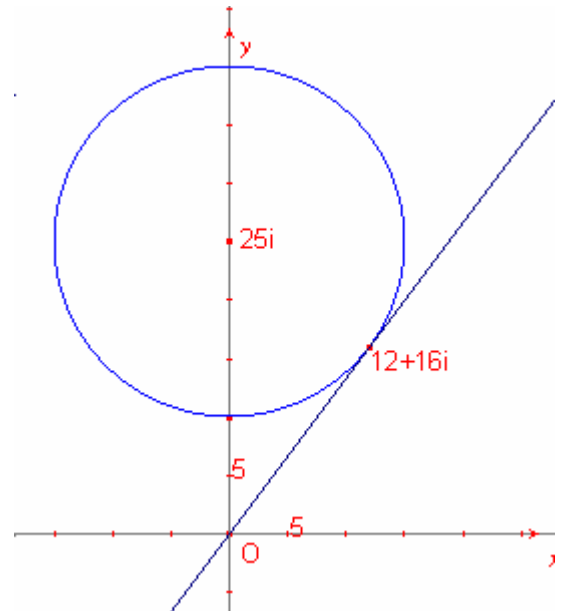
El discriminant de l'equació és 0:

$$(50m)^2 - 4(1 + m^2)400 = 0$$

Resolent l'equació:  $m = \frac{4}{3}$ ,  $m = -\frac{4}{3}$ , considerarem la primera que és la que té pendent positiva.

$$\begin{cases} x^2 + (y - 25)^2 = 15^2 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases} \quad \text{la solució del qual és, } \begin{cases} x = 12 \\ y = 16 \end{cases}$$

Per tant el complex que compleix la condició de mínim argument és  $12 + 16i$ .



70.- Demostreu que les dues arrels de l'equació  $x^2 + x + 1 = 0$  són solució de l'equació  $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2} = 0$  on  $m, n, p$  són nombres enters qualssevol.

Solució:

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Aleshores, les arrels de l'equació  $x^2 + x + 1 = 0$  són també solució de l'equació  $x^3 - 1 = 0$ .

Siguem  $x_1, x_2$  les solucions de l'equació  $x^2 + x + 1 = 0$ .

Aleshores,  $x_1^3 = 1, x_2^3 = 1$ .

També  $x_i^{3m} = (x_i^3)^m = 1, i = 1, 2$ , per a tot  $m$  nombre enter.

$$x_i^{3m} + x_i^{3n+1} + x_i^{3p+2} = 1 + x_i + x_i^2 = 0 \quad i = 1, 2.$$

Aleshores,  $x_1, x_2$  són solució de l'equació,  $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2} = 0$ .