

71.- Siga el polinomi $x^n - ax^{n-1} + ax - 1$. Determineu n i a a fi que el polinomi siga divisible per $(x-1)^2$.

Solució 1:

Siga $p(x) = x^n - ax^{n-1} + ax - 1$.

Notem que $n > 2$.

Si $p(x)$ és divisible per $(x-1)^2$, existeix un polinomi $q(x)$ tal que $p(x) = (x-1)^2 q(x)$.

Aleshores, $p(1) = 0$.

$0 = p(1) = 1 - a + a - 1 = 0$ que és una identitat.

$p'(x) = (x-1)(2q(x) + (x-1)q'(x))$.

Aleshores, $p'(1) = 0$.

$p'(x) = n \cdot x^{n-1} - a(n-1)x^{n-2} + a$.

$0 = p'(1) = n - a(n-1) + a$.

Aleshores, $a = \frac{n}{n-2}$ i $n > 2$

Solució 2:

$p(x) = x^n - ax^{n-1} + ax - 1 = x^n - 1 - ax(x^{n-2} - 1)$ (1)

$x^{k+1} - 1 = (x-1)(x^k + x^{k-1} + \dots + 1)$

$p(x)$ és divisible per $(x-1)$ aleshores podem dividir l'expressió (1) per $(x-1)$:

$$\frac{x^n - 1 - ax(x^{n-2} - 1)}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1 - ax(x^{n-3} + x^{n-4} + \dots + 1)$$

El polinomi $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1 - ax(x^{n-3} + x^{n-4} + \dots + 1)$ és divisible per $(x-1)$.

Aplicant el teorema del residu:

El valor del polinomi en $x = 1$ és el residu de dividir el polinomi entre $(x-1)$.

Aleshores:

$n - a(n-2) = 0$.

Per tant, $a = \frac{n}{n-2}$ i $n > 2$.

72.- Resoleu el sistema següent:

$$\begin{cases} x^2 + 5xy + 6y^2 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 9 \end{cases}.$$

Solució:

Notem que $y \neq 0$.

Dividim la primera equació per y^2

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{y}\right) + 6 = 0. \text{ Resolent l'equació amb la incògnita } \frac{x}{y}:$$

$$\frac{x}{y} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2}.$$

El sistema inicial és equivalent al sistemes:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = -2 \\ x^2 + xy + y^2 = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{y} = -3 \\ x^2 + xy + y^2 = 9 \end{cases}$$

Resolem els dos sistemes:

$$\begin{cases} x = -2y \\ 4y^2 - 2y^2 + y^2 = 9 \end{cases} \text{ el sistema té dues solucions: } \begin{cases} x = -2\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}, \begin{cases} x = 2\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x = -3y \\ 9y^2 - 3y^2 + y^2 = 9 \end{cases} \text{ el sistema té dues solucions: } \begin{cases} x = -9\frac{\sqrt{7}}{7} \\ y = \frac{3\sqrt{7}}{7} \end{cases}, \begin{cases} x = 9\frac{\sqrt{7}}{7} \\ y = -\frac{3\sqrt{7}}{7} \end{cases}.$$

73.- Siga $z = e^{\frac{2\pi i}{7}}$ una arrel setena de la unitat.

Calculeu $1 + z + z^4 + z^9 + z^{16} + z^{25} + z^{36}$
Oposicions Andalusia 1998.

Solució:

Escrivim z en forma polar:

$$z = e^{\frac{2\pi i}{7}} = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) = 1_{\frac{2\pi}{7}}$$

$$z^4 = \left(1_{\frac{2\pi}{7}}\right)^4 = 1_{\frac{8\pi}{7}} \quad z^9 = \left(1_{\frac{2\pi}{7}}\right)^9 = \left(1_{\frac{2\pi}{7}}\right)^7 \left(1_{\frac{2\pi}{7}}\right)^2 = 1_{\frac{4\pi}{7}}$$

$$z^{16} = \left(1_{\frac{2\pi}{7}}\right)^{16} = \left(1_{\frac{2\pi}{7}}\right)^{14} \left(1_{\frac{2\pi}{7}}\right)^2 = 1_{\frac{4\pi}{7}} \quad z^{25} = \left(1_{\frac{2\pi}{7}}\right)^{25} = \left(1_{\frac{2\pi}{7}}\right)^{21} \left(1_{\frac{2\pi}{7}}\right)^4 = 1_{\frac{8\pi}{7}}$$

$$z^{36} = \left(1_{\frac{2\pi}{7}}\right)^{36} = \left(1_{\frac{2\pi}{7}}\right)^{35} \left(1_{\frac{2\pi}{7}}\right) = 1_{\frac{2\pi}{7}}$$

$$1 + z + z^4 + z^9 + z^{16} + z^{25} + z^{36} = 1 + 2 \left(1_{\frac{2\pi}{7}} + 1_{\frac{4\pi}{7}} + 1_{\frac{8\pi}{7}} \right) =$$

$$0 = 1 + 2 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(2\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(4\frac{2\pi}{7}\right) + \left(\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(2\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(4\frac{2\pi}{7}\right) \right) \right)$$

Les solucions de l'equació $x^7 = 1$ són les arrels setenes de la unitat que són:

$$1_{\frac{2\pi k}{7}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Aplicant la fórmula de Cardano-Vieta el coeficient de grau 6 del polinomi $x^7 - 1$ és el oposat de la suma de les arrels del polinomi $x^7 - 1$, aleshores:

$$0 = 1 + 1_{\frac{2\pi}{7}} + 1_{\frac{4\pi}{7}} + 1_{\frac{6\pi}{7}} + 1_{\frac{8\pi}{7}} + 1_{\frac{10\pi}{7}} + 1_{\frac{12\pi}{7}}$$

Igualant la part real i imaginària del complex:

$$0 = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(2\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(3\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(4\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(5\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(6\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$0 = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(2\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(3\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(4\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(5\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(6\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$\cos\left(3\frac{2\pi}{7}\right) = \cos\left(4\frac{2\pi}{7}\right), \quad \cos\left(5\frac{2\pi}{7}\right) = \cos\left(2\frac{2\pi}{7}\right), \quad \cos\left(6\frac{2\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$\text{Aleshores, } 0 = 1 + 2 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(2\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(4\frac{2\pi}{7}\right) \right)$$

Aleshores,

$$1 + z + z^4 + z^9 + z^{16} + z^{25} + z^{36} = 2 \left(\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(2\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(4\frac{2\pi}{7}\right) \right) i.$$

74.- Els nombres, $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$ són els termes consecutius d'una progressió aritmètica. Demostreu que b^2 , a^2 , c^2 són termes consecutius d'una progressió aritmètica.

Solució:

Si $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$ són els termes d'una progressió aritmètica:

$$\frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b} = \frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c}$$

$$\frac{2}{b+c} = \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}$$

$$\frac{2}{b+c} = \frac{2a+b+c}{(c+a)(a+b)}$$

$$2(c+a)(a+b) = (b+c)(2a+b+c)$$

$$2ac + 2bc + 2a^2 + 2ab = 2ab + b^2 + bc + 2ac + bc + c^2$$

Simplificant,

$$2a^2 = b^2 + c^2$$

Aleshores:

$$c^2 - a^2 = a^2 - b^2$$

Per tant, b^2 , a^2 , c^2 són els termes consecutius d'una progressió aritmètica.

75.- Demostreu que si es verifica $(xy + yz + zx)^3 = xyz(x + y + z)^3$ aleshores els tres nombres x, y, z estan en progressió geomètrica.
Oposicions Castella Lleó 2002.

Solució:

Siga $y = rx$, $z = sy$.

Substituint en l'expressió inicial:

$$(rx^2 + r^2sx^2 + rsx^2)^3 = r^2sx^3(x + rx + rsx)^3.$$

Simplificant,

$$r(1 + rs + s)^3 = s(1 + r + rs)^3.$$

Considerem, $r(1 + rs + s)^3 - s(1 + r + rs)^3$.

Expandint l'expressió:

$$s^3r^4 - s(s^3 + 1)r^3 + (s^3 + 1)r - s.$$

Factoritzem el polinomi en la variable r amb la regla de Ruffini:

$$(r - s) \left(r - \frac{1}{s^2} \right) s^2 (sr^2 - 1).$$

Els zeros dels polinomi són:

$r = s$, en aquest cas x, y, z estan en progressió geomètrica en aquest ordre.

$r = \frac{1}{s^2}$, en aquest cas y, z, x estan en progressió geomètrica en aquest ordre

$r = \sqrt{\frac{1}{s}}$, en aquest cas y, x, z estan en progressió geomètrica en aquest ordre.

$r = -\sqrt{\frac{1}{s}}$, en aquest cas y, x, z estan en progressió geomètrica en aquest ordre.

76.- Siga un polinomi $p(x)$ de grau 3 amb arrels r_1, r_2, r_3 tal que $\frac{p\left(\frac{1}{2}\right) + p\left(\frac{-1}{2}\right)}{p(0)} = 1000$.

Calculeu el valor de $\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1}$.

CruX Mathematicorum 26-8.

Solució:

Siga $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ de arrels r_1, r_2, r_3 .

$$p(0) = d$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{8} + \frac{b}{4} + \frac{c}{2} + d$$

$$p\left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{a}{8} + \frac{b}{4} - \frac{c}{2} + d$$

$$\text{Considerem } \frac{p\left(\frac{1}{2}\right) + p\left(\frac{-1}{2}\right)}{p(0)} = 1000 :$$

$$\frac{\frac{a}{8} + \frac{b}{4} + \frac{c}{2} + d - \frac{a}{8} + \frac{b}{4} - \frac{c}{2} + d}{d} = 1000 . \text{ Simplificant:}$$

$$b = 1996d .$$

Per les fórmules de Cardano-Vieta:

$$d = -r_1 r_2 r_3$$

$$b = -(r_1 + r_2 + r_3)$$

$$\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{r_1 r_2 r_3} = \frac{-b}{-d} = \frac{-1996d}{-d} = -1996 .$$

77.- Obteniu els valors p i q a fi que les equacions $\begin{cases} x^3 - 6x^2 + px - 3 = 0 \\ x^3 - x^2 + qx + 2 = 0 \end{cases}$ tinguin dues

arrels comunes.

Oposicions Madrid.

Solució:

Siguen a, b les arrels comunes.

Siga M l'arrel del primer polinomi.

Siga N l'arrel del segon polinomi.

Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:

$$\begin{cases} a + b + M = 6 \\ abM = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + N = 1 \\ abN = -2 \end{cases}$$

Restant la primera i tercera:

$$M - N = 5.$$

Dividint la segona i quarta:

$$\frac{M}{N} = -\frac{3}{2}.$$

Considerem el sistema $\begin{cases} M - N = 5 \\ \frac{M}{N} = -\frac{3}{2} \end{cases}$, la solució del qual és: $\begin{cases} M = 3 \\ N = -2 \end{cases}$.

$M = 3$ és arrel del primer polinomi, el valor del polinomi en aquest punt és zero:

$$3^3 - 6 \cdot 3^2 + 3p - 3 = 0, \text{ aleshores, } p = 10.$$

$N = -2$ és arrel del segon polinomi, el valor del polinomi en aquest punt és zero:

$$(-2)^3 - (-2)^2 + (-2)q + 2 = 0, \text{ aleshores, } q = -5.$$

Si $p = 10, q = -5$, aplicant la regla de Ruffini les arrels comunes són:

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

78.- Siga el polinomi $P_n(x)$ definit de la següent forma recursiva:

$$P_0(x) = 0, \quad P_1(x) = x, \quad P_n(x) = x \cdot P_{n-1}(x) + (1-x)P_{n-2}(x), \quad \text{per a } n \geq 2.$$

Per a tot nombre natural $n \geq 1$ determineu tots el reals que satisfan $P_n(x) = 0$.

Crux Mathematicorum 26-7

Solució:

Per a $n = 1$, $P_1(x) = 0$ té una única arrel real $x = 0$.

Siga $n \geq 2$.

$$P_n(x) - x \cdot P_{n-1}(x) = (x-1)(P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)).$$

Per inducció:

$$P_n(x) - x \cdot P_{n-1}(x) = (x-1)^{n-1}(P_1(x) - P_0(x)) = (x-1)^{n-1}x. \quad \text{Per tant:}$$

$$P_n(x) = x \cdot P_{n-1}(x) + x(x-1)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= x(x-1)^{n-1} + x(x-1)^{n-2} + \dots + x + P_0(x) = \\ &= x((x-1)^{n-1} + x(x-1)^{n-2} + \dots + 1) \end{aligned}$$

Aplicant la suma d'una progressió geomètrica de raó $x-1$:

$$P_n(x) = x \frac{(x-1)^n - 1}{x-2}, \quad \forall x \neq 2.$$

Si $x = 2$, $P_n(2) = 2n \neq 0$.

$$P_n(x) = x \frac{(x-1)^n - 1}{x-2} = 0$$

Si $x = 0$ o bé $\frac{(x-1)^n - 1}{x-2} = 0$.

$$(x-1)^n - 1 = 0$$

Si n és parell $x = 0, x = 2$, $P_n(2) = 2n \neq 0$. Aleshores, $P_n(x) = 0$ si $x = 0$.

Si n és imparell $x = 2$, $P_n(2) = 2n \neq 0$.

Aleshores, $P_n(x) = 0$ si i només si $x = 0$.

79.- Siguen a, b, c tres nombres reals tal que $a + b + c = 0$.

$$\text{Proveu que } \begin{vmatrix} 2ab - c^2 & b^2 & a^2 \\ b^2 & 2bc - a^2 & c^2 \\ a^2 & c^2 & 2ac - b^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Solució:

A la primera columna del determinant li sumem la segona més la tercera:

$$\begin{vmatrix} 2ab - c^2 & b^2 & a^2 \\ b^2 & 2bc - a^2 & c^2 \\ a^2 & c^2 & 2ac - b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 + 2ab - c^2 & b^2 & a^2 \\ b^2 + c^2 + 2bc - a^2 & 2bc - a^2 & c^2 \\ a^2 + c^2 + 2ac - b^2 & c^2 & 2ac - b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a+b)^2 - c^2 & b^2 & a^2 \\ (b+c)^2 - a^2 & 2bc - a^2 & c^2 \\ (a+c)^2 - b^2 & c^2 & 2ac - b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a+b+c)(a+b-c) & b^2 & a^2 \\ (a+b+c)(-a+b+c) & 2bc - a^2 & c^2 \\ (a+b+c)(a-b+c) & c^2 & 2ac - b^2 \end{vmatrix} =$$

Podem treure el factor $a + b + c$ de la primera columna

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} a+b-c & b^2 & a^2 \\ -a+b+c & 2bc - a^2 & c^2 \\ a-b+c & c^2 & 2ac - b^2 \end{vmatrix} = 0$$

80.-

a) Resoleu l'equació, $\frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$.

b) Proveu que $\sum_{r=1}^n r \cdot \log_{2^r} x = n \cdot \log_2 x$.

Solució:

a)

$$\log(35 - x^3) = 3 \cdot \log(5 - x).$$

$$\log(35 - x^3) = \log(5 - x)^3.$$

La funció logaritme és injectiva, aleshores,

$$35 - x^3 = (5 - x)^3.$$

$$35 - x^3 = 125 - 75x + 15x^2 - x^3.$$

Simplificant:

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

$$x = 1, -3.$$

Les dues solucions són vàlides ja que:

Si $x = 1$, $\log(35 - 1) \in \mathbb{R}$, $\log(5 - 1) \in \mathbb{R}$.

Si $x = -3$, $\log(35 + 27) \in \mathbb{R}$, $\log(5 + 3) \in \mathbb{R}$.

b)

Efectuant el canvi de base de logaritme:

$$\sum_{r=1}^n r \cdot \log_{2^r} x = \sum_{r=1}^n r \frac{\log_2 x}{\log_2 2^r} = \sum_{r=1}^n r \frac{\log_2 x}{r} = \sum_{r=1}^n \log_2 x = n \cdot \log_2 x.$$