Problemes Àlgebra 8

71.- Siga el polinomi $x^n - ax^{n-1} + ax - 1$. Determineu n i a a fi que el polinomi siga divisible per $(x-1)^2$.

72.- Resoleu el sistema següent:
$$\begin{cases} x^2 + 5xy + 6y^2 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 9 \end{cases}.$$

73.- Siga $z = e^{\frac{2\pi i}{7}}$ una arrel setena de la unitat.
Calculeu $1 + z + z^4 + z^9 + z^{16} + z^{25} + z^{36}$. Oposicions Andalusia 1998.

74.- Els nombres, $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}$ són els termes consecutius d'una progressió aritmètica. Demostreu que b^2, a^2, c^2 són termes consecutius d'una progressió aritmètica.

75.- Demostreu que si es verifica $(xy + yz + zx)^3 = xyz(x+y+z)^3$ aleshores els tres nombres x, y, z estan en progressió geomètrica. Oposicions Castella Lleó 2002.

76.- Siga un polinomi $p(x)$ de grau 3 amb arrels r_1, r_2, r_3 tal que $\dfrac{p\left(\frac{1}{2}\right) + p\left(\frac{-1}{2}\right)}{p(0)} = 1000$.
Calculeu el valor de $\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1}$. Crux Mathematicorum 26-8.

77.- Obteniu els valors p i q a fi que les equacions $\begin{cases} x^3 - 6x^2 + px - 3 = 0 \\ x^3 - x^2 + qx + 2 = 0 \end{cases}$ tinguen dues arrels comunes. Oposicions Madrid.

78.- Siga el polinomi $P_n(x)$ definit de la següent forma recursiva:
$P_0(x) = 0$, $P_1(x) = x$, $P_n(x) = x \cdot P_{n-1}(x) + (1-x)P_{n-2}(x)$, per a $n \geq 2$.
Per a tot nombre natural $n \geq 1$ determineu tots el reals que satisfan $P_n(x) = 0$.
Crux Matematicorum 26-7

79.- Siguen a, b, c tres nombres reals tal que $a + b + c = 0$.
Proveu que $\begin{vmatrix} 2ab - c^2 & b^2 & a^2 \\ b^2 & 2bc - a^2 & c^2 \\ a^2 & c^2 & 2ac - b^2 \end{vmatrix} = 0$.

80.-
a) Resoleu l'equació, $\dfrac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$.

b) Proveu que $\sum_{r=1}^{n} r \cdot \log_{2^r} x = n \cdot \log_2 x$.