

81.- La suma de dues solucions de l'equació $x^3 - 503x^2 + (a + 4)x - a = 0$ és 4.
 Determineu el valor de a.

Solució:

Siguen r, s, t les solucions de l'equació $r + s + t = 4$ (1)

Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:

$$r + s + t = 503 .$$

$$4 + t = 503 .$$

$$\text{Aleshores, } t = 499 \quad (2)$$

$$rst = a$$

$$499rs = a . \text{ Aleshores, } rs = \frac{a}{499} \quad (3)$$

$$rs + rt + st = a + 4 .$$

$$rs + (r + s)t = a + 4 \quad (4)$$

Substituint les expressions (1) (2) i (3) en l'expressió (4):

$$\frac{a}{499} + 4 \cdot 499 = a + 4 .$$

Resolent l'equació:

$$a = 1996 .$$

82.- Sabent que les arrels de la família de polinomis $p(z) = z^3 - 3\lambda iz^2 - 4\lambda^2 z + 2\lambda^3 i$ estan situades en el plànol complex sobre una recta paral·lela a l'eix real i sumen $3\lambda i$ i una de les arrels del polinomi $q(z) = (z^2 - 2\lambda^2 iz - \lambda^2(1 + \lambda^2))p(z)$ recorre l'eix imaginari.

a) Les altres arrels de $q(x)$ que recorren?

b) Determineu la condició necessària i suficient a fi que les quatre arrels no imaginàries pures de $q(z)$ siguin els vèrtexs d'un quadrat.

Solució:

a)

Les arrels de $p(z)$ són de la forma $z_1 = a_1 + bi$, $z_2 = a_2 + bi$, $z_3 = a_3 + bi$, per estar situades en una recta paral·lela a l'eix real.

$3\lambda i = (a_1 + a_2 + a_3) + 3bi$. Igualant la part imaginària:

$b = \lambda$.

Resolem l'equació $z^2 - 2\lambda^2 iz - \lambda^2(1 + \lambda^2) = 0$:

$$z = \begin{cases} \lambda + \lambda^2 i \\ -\lambda + \lambda^2 i \end{cases} \text{ les quals recorren la paràbola } y = x^2$$

Com que una de les arrels de l'equació

$q(z) = (z^2 - 2\lambda^2 iz - \lambda^2(1 + \lambda^2))p(z)$ recorre l'eix imaginari, l'arrel imaginària pura és una de les del polinomi $p(z)$.

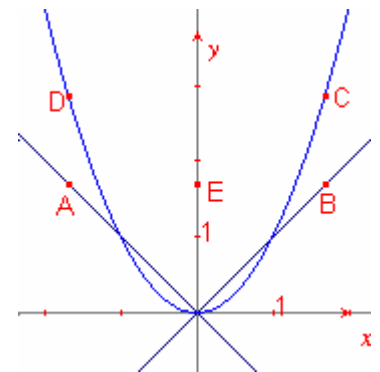
Aleshores una arrel de $p(x)$ és $z_1 = \lambda i$.

Aplicant la regla de Ruffini al polinomi $p(z)$:

$$p(z) = (z - \lambda i)(z^2 + 2\lambda iz - 2\lambda^2).$$

Resolem l'equació $z^2 + 2\lambda iz - 2\lambda^2 = 0$,

$$z = \begin{cases} \lambda - \lambda i \\ -\lambda + \lambda i \end{cases} \text{ Les quals recorren les rectes } y = x, y = -x.$$



b)

Els punts que determinen les arrels són:

$A(-\lambda, -\lambda)$, $B(\lambda, -\lambda)$, $C(\lambda, \lambda^2)$, $D(-\lambda, \lambda^2)$

Les condicions perquè formen un quadrat són:

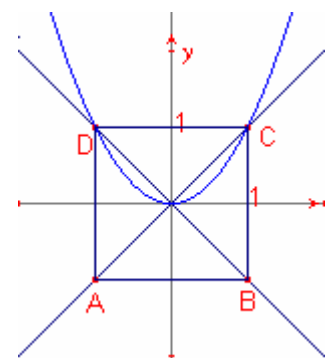
$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{DC} \\ \overline{AD} = \overline{BC} \\ \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0 \\ \|\overline{AB}\| = \|\overline{AD}\| \end{cases}$$

$$\overline{AB} = (2\lambda, 0), \overline{DC} = (2\lambda, 0), \overline{BC} = (0, \lambda^2 + \lambda), \overline{AD} = (0, \lambda^2 + \lambda)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0.$$

$$\|\overline{AB}\|^2 = 4\lambda^2, \quad \|\overline{AD}\|^2 = (\lambda^2 + \lambda)^2.$$

$4\lambda^2 = (\lambda^2 + \lambda)^2$. Resolent l'equació, $\lambda = -3$, $\lambda = 1$. $\lambda = -3$ no és solució.



83.- Siguen les progressions aritmètiques i geomètriques amb primer terme $a_1 = 1$ i raó natural que contenen el nombre 1987.

Siga G =el conjunt d'aquestes que són geomètriques i $|G| = g$ el seu cardinal.

Siga A =el conjunt d'aquestes que són aritmètiques i $|A| = a$ el seu cardinal.

a) Proveu que a i g són cubs perfectes. $a - g$ nombre primer. $a + g$ quadrat perfecte.

b) Calculeu $A \cap G$.

Solució:

a)

1987 és un nombre primer.

Com que 1987 pertany a totes les progressions, en particular pertany a les geomètriques, aleshores:

$1987 = a_1 \cdot r^{n-1}$ on r és un nombre natural per hipòtesi.

$1987 = r^{n-1}$, per ser 1987 nombre primer, $r = 1987$.

Aleshores, $|G| = 1$.

1987 pertany a les progressions aritmètiques, aleshores:

$1987 = a_1 + (n-1)d$ on d és un nombre natural per hipòtesi:

$1987 = 1 + (n-1)d$.

$(n-1)d = 1986 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 331$

Els possibles solucions de d són els divisors de 1986 que són:

$d = 1, 2, 3, 331, 2 \cdot 3, 2 \cdot 331, 3 \cdot 331, 2 \cdot 3 \cdot 331$.

Aleshores, $|A| = 8$.

$a - g = 7$ que és un nombre primer.

$a + g = 9 = 3^2$.

b)

Cap de les 8 progressions aritmètiques és igual a la progressió geomètrica, aleshores:

$A \cap G = \emptyset$.

84. Resoleu l'equació $x^2 - 871 = y^6$ en els nombres naturals.

Solució:

$$871 = 13 \cdot 67 .$$

$$x^2 - y^6 = 871$$

$$x^2 - y^6 = 13 \cdot 67$$

Factoritzant:

$$(x + y^3)(x - y^3) = 13 \cdot 67 .$$

Com que $x + y^3 > x - y^3$ i $x + y^3 > 0$.

$$\begin{cases} x + y^3 = 67 \\ x - y^3 = 13 \end{cases} \text{ o bé, } \begin{cases} x + y^3 = 871 \\ x - y^3 = 1 \end{cases} .$$

$$\text{Si } \begin{cases} x + y^3 = 67 \\ x - y^3 = 13 \end{cases} , \begin{cases} x = 40 \\ y = 3 \end{cases} .$$

$$\text{Si } \begin{cases} x + y^3 = 871 \\ x - y^3 = 1 \end{cases} , \begin{cases} x = 436 \\ y = \sqrt[3]{435} \notin \mathbb{N} \end{cases} \text{ el sistema no té solució en el naturals.}$$

85.- Demostreu que si $\frac{l}{a} + \frac{m}{b} + \frac{n}{c} = 1$ i $\frac{a}{l} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} = 0$ aleshores, $\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} = 1$.

Solució:

$$\frac{l}{a} + \frac{m}{b} + \frac{n}{c} = 1, \text{ aleshores, } bcl + acm + abn = abc \quad (1)$$

$$\frac{a}{l} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} = 0, \text{ aleshores, } amn + bln + clm = 0 \quad (2)$$

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} = \frac{(bcl)^2 + (acm)^2 + (abn)^2}{(abc)^2} =$$

Substituint l'expressió (1):

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} &= \frac{(bcl)^2 + (acm)^2 + (abn)^2}{(abc)^2} = \frac{(bcl)^2 + (acm)^2 + (abn)^2}{(bcl + acm + abn)^2} = \\ &= \frac{(bcl)^2 + (acm)^2 + (abn)^2}{(bcl + acm + abn)^2} = \frac{(bcl)^2 + (acm)^2 + (abn)^2}{(bcl)^2 + (acm)^2 + (abn)^2 + 2abc^2lm + 2ab^2ln + 2a^2bcmn} = \\ &= \frac{(bcl)^2 + (acm)^2 + (abn)^2}{(bcl)^2 + (acm)^2 + (abn)^2 + 2abc(clm + bln + amn)} = \end{aligned}$$

Substituint l'expressió (2):

$$\begin{aligned} &= \frac{(bcl)^2 + (acm)^2 + (abn)^2}{(bcl)^2 + (acm)^2 + (abn)^2 + 2abc \cdot 0} = \\ &= \frac{(bcl)^2 + (acm)^2 + (abn)^2}{(bcl)^2 + (acm)^2 + (abn)^2} = 1. \end{aligned}$$

86.- Resoleu en els nombres reals el sistema
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 9 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 63 \end{cases} .$$

Solució:

Calculem $x^2 + y^2 + z^2$:

$$6^2 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot 9 .$$

Aleshores,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 18 .$$

Calculem xyz :

$$6^3 = (x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 3xz^2 + 3y^2z + 3yz^2 + 6xyz$$

$$6^3 = -2x^3 - 2y^3 - 2z^3 + 3x(x^2 + y^2 + z^2) + 3y(x^2 + y^2 + z^2) + 3z(x^2 + y^2 + z^2) + 6xyz$$

$$6^3 = -2(x^3 + y^3 + z^3) + 3(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) + 6xyz$$

$$6^3 = -2 \cdot 63 + 3 \cdot 6 \cdot 18 + 6xyz$$

Aleshores,

$$xyz = 3 .$$

El sistema és equivalent a:
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 9 \\ xyz = 3 \end{cases}$$

Utilitzant les fórmules de Cardano-Vieta les solucions reals d'aquest sistema són solucions de l'equació cúbica:

$$P^3 - 6P^2 + 9P - 3 = 0 .$$

Les solucions de la qual són: $P_1 = 2 + 2 \cos \frac{\pi}{9}$, $P_2 = 2 - 2 \cos \frac{2\pi}{9}$, $P_3 = 2 - 2 \sin \frac{\pi}{18}$.

Les solucions reals del sistema són:

$$\begin{cases} x = 2 + 2 \cos \frac{\pi}{9} \\ y = 2 - 2 \cos \frac{2\pi}{9} \\ z = 2 - 2 \sin \frac{\pi}{18} \end{cases} \text{ o qualsevol de les sis permutacions d'elles.}$$

87.- Resoleu en els complexos l'equació $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

Solució 1:

Multipliquem l'equació per $z - 1$:

$$(z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0.$$

$$z^5 - 1 = 0.$$

$$z = \sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{1_0} = \begin{cases} 1_0 \\ 1_{0+\frac{2\pi}{5}} \\ 1_{0+\frac{2\pi}{5} \cdot 2} \\ 1_{0+\frac{2\pi}{5} \cdot 3} \\ 1_{0+\frac{2\pi}{5} \cdot 4} \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \\ \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5} \\ -\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} \\ -\cos \frac{3\pi}{5} - i \sin \frac{2\pi}{5} \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}i \\ \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}i \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}i \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}i \end{cases}$$

Notem que $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, $\sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

Les solucions de l'equació inicial són:

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}i, \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}i,$$

$$z_3 = -\frac{1 + \sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}i, \quad z_4 = -\frac{1 - \sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}i$$

Solució 2:

$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Dividim l'equació entre z^2 :

$$z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0.$$

Completem quadrats de $z + \frac{1}{z}$: $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$

Resolem l'equació de segon grau amb la incògnita $p = z + \frac{1}{z}$:

$$p_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad p_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Desfem el canvi:

$$z + \frac{1}{z} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z^2 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)z + 1 = 0, \text{ resolent l'equació:}$$

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}i, \quad z_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}i$$

$$z + \frac{1}{z} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad z^2 - \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)z + 1 = 0, \text{ resolent l'equació:}$$

$$z_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}i, \quad z_4 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}i.$$

88.- Si $x + y + z = 6$ proveu que $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$.

Solució:

Aplicarem la desigualtat Cauchy-Schwartz als vectors $a = (1, 1, 1)$, $b = (x, y, z)$

$$ab \leq \|a\| \cdot \|b\|.$$

$$(ab)^2 \leq \|a\|^2 \cdot \|b\|^2$$

$$(x + y + z)^2 \leq \left(\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \right)^2 \cdot \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^2$$

$$6^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$$

La igualtat es té quan $x = y = z = 2$.

89.- Siguen a, b, c les arrels del polinomi $x^3 - 2x^2 + x + 5$. Calculeu $a^4 + b^4 + c^4$.

Solució:

Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ ab + bc + ca = 1 \\ abc = -5 \end{cases}$$

Per ser a arrel de $x^3 - 2x^2 + x + 5$:

$$a^3 - 2a^2 + a + 5 = 0$$

$$a^3 = 2a^2 - a - 5$$

$$a^4 = a \cdot a^3 = a(2a^2 - a - 5) = 2a^3 - a^2 - 5a = 2(2a^2 - a - 5) - a^2 - 5a = 3a^2 - 7a - 10.$$

Anàlogament:

$$b^4 = 3b^2 - 7b - 10$$

$$c^4 = 3c^2 - 7c - 10$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - 7(a + b + c) - 3 \cdot 10$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - 7 \cdot 2 - 3 \cdot 10$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - 44$$

Calculem $a^2 + b^2 + c^2$:

$$2^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot 1.$$

$$\text{Aleshores: } a^2 + b^2 + c^2 = 2.$$

Per tant:

$$a^4 + b^4 + c^4 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - 44 = 3 \cdot 2 - 44 = -38.$$

90.- El producte de dues arrels de les quatre arrels del polinomi $x^4 - 18x^3 + k \cdot x^2 + 200x - 1984$ és -32 . Determineu el valor de k .

Solució:

Siguen a, b, c, d les arrels del polinomi tal que $ab = -32$.

Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:

$$abcd = -1984$$

$$-32cd = 1984 \text{ . Aleshores, } cd = 62 \text{ .}$$

Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = k$$

$$(a + b)(c + d) + 30 = k \quad (1)$$

Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:

$$a + b + c + d = 18 \quad (2)$$

$$abc + abd + acd + bcd = -200 \text{ .}$$

$$-32(c + d) + 62(a + b) = -200 \text{ .}$$

Aïllant $a + b$

$$a + b = \frac{-100 + 16(c + d)}{31} \quad (3)$$

Substituint l'expressió (3) en l'expressió (2):

$$\frac{-100 + 16(c + d)}{31} + (c + d) = 18 \text{ . Resolent el la incògnita (c+d):}$$

$$c + d = 14 \quad (4)$$

Substituint l'expressió (4) en l'expressió (3):

$$a + b = 4 \quad (5)$$

Substituint les expressions (4) (5) en l'expressió (1):

$$4 \cdot 14 + 30 = k$$

Aleshores, $k = 86$.

El polinomi quedaria:

$$x^4 - 18x^3 + 86x^2 + 200x - 1984 \text{ .}$$

Calculant les arrels per la regla de Ruffini:

$$x = -4, x = 8, x = 7 + \sqrt{13}i, x = 7 - \sqrt{13}i \text{ .}$$