

1.- Demostreu que no existeix cap funció contínua positiva $f(x)$, $0 \leq x \leq 1$ tal que verifiqui simultàniament:

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \quad \int_0^1 x \cdot f(x)dx = a, \quad \int_0^1 x^2 \cdot f(x)dx = a^2 \quad \text{on } a \text{ és un nombre real.}$$

Solució:

Suposem que existeix una funció contínua $f(x)$, $f(x) > 0$ en $x \in [0,1]$ que verifiqui les condicions.

$$\int_0^1 (x-a)^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot f(x)dx - 2a \int_0^1 x \cdot f(x)dx + a^2 \int_0^1 f(x)dx = a^2 - 2a^2 + a^2 = 0.$$

La qual cosa és absurda ja que la funció $(x-a)^2 f(x)$ és positiva per tant:

$$\int_0^1 (x-a)^2 f(x)dx > 0.$$

2.-

- a) Demostreu que de tots els triangles amb la mateixa base i el mateix angle oposat, l'isòsceles té àrea màxima.
 b) Proveu que entre tots els triangles inscrits en una circumferència l'equilàter té àrea màxima.

Solució:

- a) Siguen el costat a i l'angle A fixos.
 Per la fórmula trigonomètrica de l'àrea:

$$S_{ABC} = \frac{ab \cdot \sin C}{2}.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \quad C = \pi - (A + B)$$

Aleshores, $b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A}$. Aleshores la superfície és:

$$S(B) = \frac{ab \cdot \sin C}{2} = \frac{a^2}{2 \cdot \sin A} \sin B \cdot \sin(\pi - (A + B)), \quad S(B) = \frac{a^2}{2 \cdot \sin A} \sin B \cdot \sin(A + B)$$

$$S(B) = \frac{a^2}{2 \cdot \sin A} \left(\frac{-1}{2} \right) (\cos(A + 2B) - \cos A)$$

Derivem la funció àrea:

$$S'(B) = \frac{a^2}{2 \cdot \sin A} \sin(A + 2B). \text{ Igualem la derivada a zero:}$$

$$S'(B) = 0. \quad \sin(A + 2B) = 0. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$A + 2B = \pi.$$

Aleshores, $B = \frac{\pi - A}{2}$. Per tant, $C = \pi - (A + B) = \frac{\pi - A}{2}$. És a dir, el triangle és isòsceles.

isòsceles.

Calculem la segona derivada.

$$S''(B) = \frac{a^2}{\sin A} \cos(A + 2B)$$

$$S''\left(\frac{\pi - A}{2}\right) = \frac{a^2}{\sin A} \cos(\pi) < 0. \text{ Aleshores, } B = \frac{\pi - A}{2} \text{ és un màxim.}$$

b)

Hem de fer notar que si considerem els triangles inscrits en una circumferència amb costat fix és verifca que tos els triangle tenen el mateix angle oposat, ja que és un angle inscrit en la circumferència. El de major àrea és l'isòsceles.

Aleshores hem de provar que de tots els triangles isòsceles inscrits en la circumferència el equilàter és el d'àrea màxima.

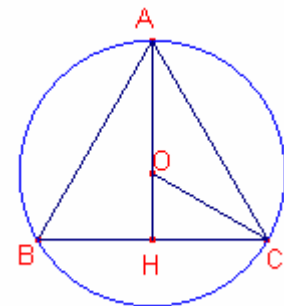
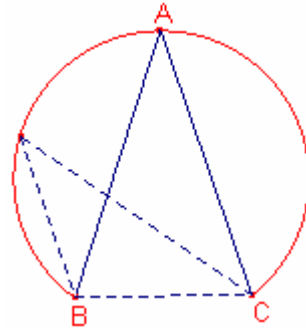
Siga O el centre de la circumferència.

Siga $\triangle ABC$ isòsceles $\overline{AB} = \overline{AC}$ inscrit en la circumferència de radi R .

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot h}{2}, \quad h = \overline{AH}. \text{ Siga } \alpha = \angle OCH.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle OHC$:

$$\overline{OH} = R \cdot \sin \alpha, \quad a = 2R \cdot \cos \alpha.$$



$$S(\alpha) = \frac{2R \cos \alpha (R + R \sin \alpha)}{2} = R^2 (\cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha).$$

Derivem la funció àrea:

$$S'(\alpha) = R^2 (-2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha + 1). \text{ Igualem la derivada a zero:}$$

$$S'(\alpha) = 0.$$

$$-2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha + 1 = 0, \text{ resolent l'equació, } \alpha = 30^\circ.$$

Aleshores, $B = C = 60^\circ$. Per tant el triangle és equilàter.

Calculem la segona derivada:

$$S''(\alpha) = R^2 (-4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \cos \alpha).$$

$$S''\left(\frac{\pi}{6}\right) = R^2 \left(-4 \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0.$$

Aleshores, $\alpha = 30^\circ$ és un màxim.

3.- Determineu el volum del sòlid generat al girar al voltant de l'eix OX, la regió del plànol que resulta de la intersecció de l'interior de $x^2 + y^2 = 17$, $x^2 + y^2 = 17x$

Solució:

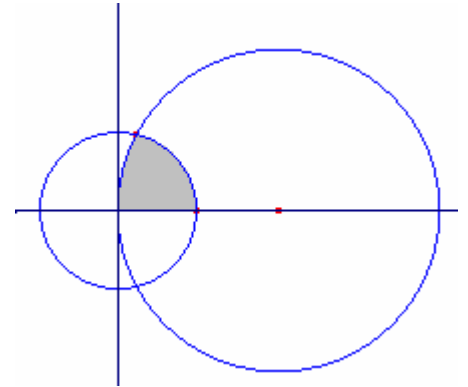
$x^2 + y^2 = 17$ és la circumferència de centre $(0,0)$ i radi $\sqrt{17}$

$x^2 + y^2 = 17x$ és la circumferència de centre $\left(\frac{17}{2}, 0\right)$ i radi $\frac{17}{2}$.

Determinem la intersecció de les dues circumferències:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 + y^2 = 17x \end{cases} \text{ les solucions del qual són, } \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}$$

Siguen $f(x) = \sqrt{17 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{17x - x^2}$.



El volum que cerquem és el volum de revolució de la funció $g(x)$ entre $[0,1]$ més el volum de revolució de la funció $f(x)$ entre $[1, \sqrt{17}]$.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 g^2(x) dx + \pi \int_1^{\sqrt{17}} f^2(x) dx = \\ &= \pi \int_0^1 (17x - x^2) dx + \pi \int_1^{\sqrt{17}} (17 - x^2) dx = \\ &= \pi \left(17 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \pi \left(17x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{17}} = \pi \left(\frac{34\sqrt{17}}{3} - \frac{17}{2} \right) \mu^3. \end{aligned}$$

4.- Calculeu el límit: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^3 + ax^2} - \sqrt[3]{x^3 - bx^2}$.

Solució:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^3 + ax^2} - \sqrt[3]{x^3 - bx^2} = \infty - \infty$, indeterminació.

Notem que $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$.

Siga $A = \sqrt[3]{x^3 + ax^2}$, $B = \sqrt[3]{x^3 - bx^2}$. Aleshores:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^3 + ax^2} - \sqrt[3]{x^3 - bx^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 + ax^2) - (x^3 - bx^2)}{\sqrt[3]{(x^3 + ax^2)^2} + \sqrt[3]{(x^3 + ax^2)(x^3 - bx^2)} + \sqrt[3]{(x^3 - bx^2)^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a+b)x^2}{\sqrt[3]{x^6 + 2ax^5 + a^2x^4} + \sqrt[3]{x^6 + (a-b)x^5 - abx^4} + \sqrt[3]{x^6 - 2bx^5 + b^2x^4}} = \end{aligned}$$

Dividint numerador i denominador per x^2 :

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a+b}{\sqrt[3]{1 + \frac{2a}{x} + \frac{a^2}{x^2}} + \sqrt[3]{1 + \frac{a-b}{x} - \frac{ab}{x^2}} + \sqrt[3]{1 - \frac{2b}{x} + \frac{b^2}{x^2}}} = \frac{a+b}{3}.$$

5.- Siga $f(x) = \int_0^x (1+t^3)^{-1/2} dt \quad x \geq 0$.

a) Proveu que $f(x)$ és estrictament creixent $\forall x \geq 0$.

b) Siga $g(x)$ la funció inversa de $f(x)$. Proveu que $g''(x)$ és proporcional a $g^2(x)$ i calculeu la constant de proporcionalitat.

Solució:

a)

Siga $h(t) = (1+t^3)^{-1/2}, \quad t \geq 0$.

$h(t)$ és contínua en $t \geq 0$.

Aleshores $f(x)$ és contínua i derivable en $x \geq 0$, a més a més,

$$f'(x) = h(x) = (1+x^3)^{-1/2}.$$

Notem que $f'(x) > 0 \quad \forall x \geq 0$, aleshores, $f(x)$ és estrictament creixent en $x \geq 0$.

b)

Siga $g(x)$ la funció inversa de $f(x)$. Pel teorema de la derivada de la funció inversa:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{(1+g^3(x))^{-1/2}}.$$

$$g''(x) = \frac{\frac{1}{2}(1+g^3(x))^{-3/2} 3g^2(x) \cdot g'(x)}{(1+g^3(x))^{-1}} = \frac{\frac{3}{2}(1+g^3(x))^{-3/2} g^2(x) \cdot (1+g^3(x))^{1/2}}{(1+g^3(x))^{-1}} = \frac{3}{2} g^2(x).$$

Aleshores,

$$\frac{g''(x)}{g^2(x)} = \frac{3}{2}.$$

6.- Siga $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+19) \leq f(x)+19, f(x+94) \geq f(x)+94$.
 Demostreu que $f(x+1) = f(x)+1$.

Solució:

$$f(x) \geq f(x+19) - 19, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Aleshores, } f(x-19) \geq f(x) - 19.$$

$$f(x) \leq f(x+94) - 94, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Aleshores, } f(x-94) \leq f(x) - 94.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$f(x+19n) \leq f(x) + 19n.$$

$$f(x+94n) \geq f(x) + 94n.$$

$$f(x-19n) \geq f(x) - 19n.$$

$$f(x-94n) \leq f(x) - 94n.$$

Notem que $1 = 5 \times 19 - 94, \quad 1 = 18 \times 94 - 89 \times 19$.

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f(x+5 \times 19 - 94) \leq f(x+5 \times 19) - 94 \\ &\leq f(x) + 5 \times 19 - 94 \\ &\leq f(x) + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f(x+18 \times 94 - 89 \times 19) \geq f(x+18 \times 94) - 89 \times 19 \\ &\geq f(x) + 18 \times 94 - 89 \times 19 \\ &\leq f(x) + 1. \end{aligned}$$

Aleshores, $f(x+1) = f(x) + 1$.

7.- Siga la funció $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

a) Calculeu $S(n)$ l'àrea limitada per la corba $f(x)$, $x = 1$ i $x = n$, $n > 1$.

b) Calculeu $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n)$.

Solució:

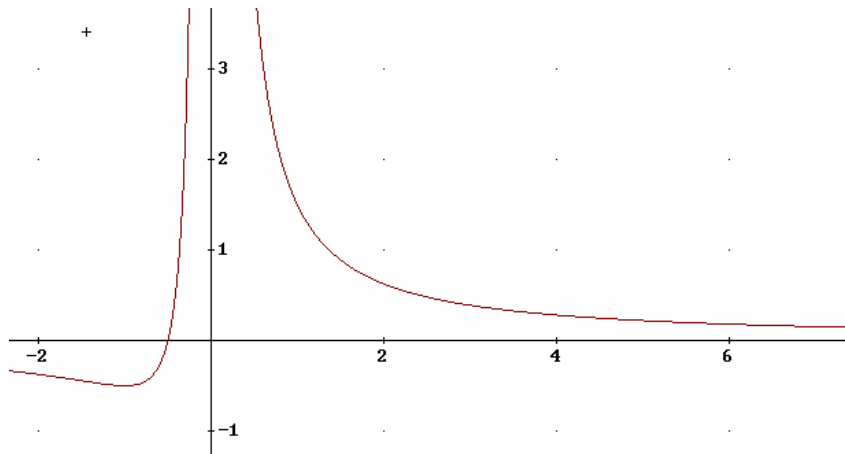
a)

Calculem $S(n)$:

$$S(n) = \int_1^n \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\ln|x| - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^n = \ln(n) - \frac{1}{n} + 1.$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln(n) - \frac{1}{n} + 1 \right) = +\infty.$$



8.- Un dipòsit inicialment ple amb 1000 litres d'aigua salada la concentració o salinitat del qual és de dos grams de sal per litre. Per a reduir la salinitat es fa entrar aigua pura en el dipòsit a raó de 5 litres per minut, al mateix temps per un orifici el dipòsit evacua el mateix cabdal. Determineu la quantitat de sal continguda en el dipòsit en funció del temps i calculeu el temps que ha de transcórrer a fi que només queden 200 grans de sal.

Solució:

Denotem per $S(t)$ la funció que cerquem, és a dir la quantitat de sal en grams que conté el dipòsit en funció del temps t en minuts.

La concentració de sal en l'instant t val $\frac{S(t)}{1000}$ gr/l.

En l'instant $t + \Delta t$ la quantitat de sal serà $S(t + \Delta t)$ i per tant els grams de sal que han eixit del dipòsit en l'interval de temps $[t, t + \Delta t]$ són $S(t) - S(t + \Delta t)$.

Per altra banda sabem que durant aquest interval de temps el dipòsit a evacuat $5 \cdot \Delta t$ litres d'aigua salada.

Si l'increment Δt és molt petit, la concentració de l'aigua del dipòsit pot considerar-se constant en el transcurs de l'interval de temps $[t, t + \Delta t]$.

El producte de l'aigua sortida $5 \cdot \Delta t$ per la concentració $\frac{S(t)}{1000}$ gr/l ens donarà la quantitat de sal desapareguda en dit interval de temps.

Plantegem l'equació:

$$S(t) - S(t + \Delta t) = \frac{5}{1000} S(t) \Delta t, \text{ és a dir, } \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{-1}{200} S(t).$$

Calculant límits a ambdues parts:

$$S'(t) = \frac{-S(t)}{200}, \text{ és a dir, } \frac{S'(t)}{S(t)} = \frac{-1}{200}.$$

Calculant la integral respecte de t :

$$\int \frac{S'(t)}{S(t)} dt = \int \frac{-1}{200} dt, \quad \ln(S(t)) = \frac{-1}{200} t + k.$$

Aleshores, $S(t) = e^{\frac{-1}{200}t + k}$. Calculem k .

$$S(0) = 2000, \text{ aleshores, } 2000 = e^k.$$

$$\text{Per tant, } S(t) = 2000 \cdot e^{\frac{-1}{200}t}.$$

Calculem el temps que ha de transcórrer a fi que només queden 200 gr de sal:

$$S(t) = 200.$$

$$200 = 2000 \cdot e^{\frac{-1}{200}t}. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$t = 200 \cdot \ln 10$$

Com que $\ln 10 \approx 2.3026$.

$$t \approx 461m = 7h41m.$$

9.- Siga $f(x) = 5(x+1)^2 + \frac{a}{(x+1)^5}$ on a és un nombre real positiu.

Quin és valor mínim per a a fi que $f(x) \geq 24$ quan $x \geq 0$.

Solució:

Calculem la derivada de la funció $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{5}{(x+1)^6} (2(x+1)^7 - a)$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{5}{(x+1)^6} (2(x+1)^7 - a) = 0 \Leftrightarrow 2(x+1)^7 - a = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[7]{\frac{a}{2}} - 1.$$

$$f''(x) = 10 + \frac{30a}{(x+1)^7}$$

$$f''\left(\sqrt[7]{\frac{a}{2}} - 1\right) = 70 \geq 0 \text{ aleshores, } x = \sqrt[7]{\frac{a}{2}} - 1 \text{ és un mínim relatiu } \forall a \in \mathbb{R} \sim 0.$$

Quan $a = 0$, $x = -1$ que no està en el domini de la funció.

$$f\left(\sqrt[7]{\frac{a}{2}} - 1\right) \geq 24.$$

$$5\left(\sqrt[7]{\frac{a}{2}}\right)^2 + \frac{a}{\left(\sqrt[7]{\frac{a}{2}} - 1\right)^5} \geq 24. \text{ Llevant denominadors:}$$

$$\frac{7a}{2} \geq 24\left(\sqrt[7]{\frac{a}{2}}\right)^5. \text{ Elevant a 7:}$$

$$\frac{7^7 a^7}{2^7} \geq 24^7 \left(\frac{a}{2}\right)^5.$$

Simplificant:

$$a^2 \geq \frac{24^7 \cdot 2^2}{7^7}$$

$$a \geq \sqrt{\frac{24^7 \cdot 2^2}{7^7}}.$$

$$\text{El valor mínim de } a \text{ és: } a = \sqrt{\frac{24^7 \cdot 2^2}{7^7}}.$$

10.- La funció $f(x) = 2 \cdot \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ és constant per a $x \geq 1$.

Solució:

El domini de la funció $f(x)$ és:

$$\left\{ x \in \mathbb{R} / -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \right\}$$

$$\begin{cases} 2x \leq 1+x^2 \\ -1-x^2 \leq 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-x)^2 \geq 0 \\ (1+x)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Aleshores, el domini és \mathbb{R} . La funció és contínua en \mathbb{R} .

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \frac{2(1-x^2)}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2} & \text{si } 1-x^2 > 0 \\ \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} & \text{si } 1-x^2 < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{4}{1+x^2} & \text{si } x \in]-1, 1[\\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La funció és derivable en $\mathbb{R} \sim \{-1, 1\}$.

Aplicant el teorema fonamental del càlcul integral, la funció $f(x)$ és constant en $\mathbb{R} \sim [-1, 1]$.

Calculem el valor de la constant quan $x \geq 1$:

$$f(1) = 2 \cdot \operatorname{arctg}(1) + \arcsin(1) = 2 \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Calculem el valor de la constant quan $x \leq -1$:

$$f(-1) = 2 \cdot \operatorname{arctg}(-1) + \arcsin(-1) = 2 \frac{-\pi}{4} + \frac{-\pi}{2} = -\pi.$$

