

91.- Un got cilíndric de radi  $a$  i altura  $h$  està inclinat de forma que l'aigua de l'interior bisecta la base i toca la vora superior del got. Determineu el volum de l'aigua continguda en el got.  
Oposicions d'Extremadura 2006.

Solució (Dani de la Paz):

Considerem el cilindre  $x^2 + y^2 = a^2$  de radi  $a$  i altura  $h$ .

L'aigua bisecta a la base en els punts  $A(-a,0,0)$ ,  $B(a,0,0)$  i la vora del got és el punt  $C(0,-a,h)$ .

Determinem el plànel  $\Pi$  que passa pels punts  $A$ ,  $B$ ,  $C$  que talla el cilindre formant mitja el·lipse.

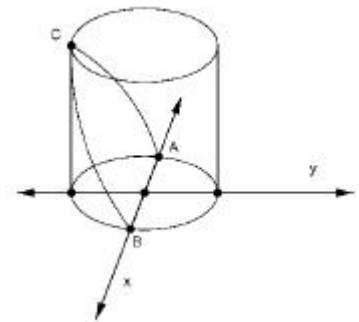
$\vec{CA} = (-a, a, -h)$ ,  $\vec{CB} = (a, a, -h)$ .

L'equació del plànel és:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y+a & z-h \\ -a & a & -h \\ a & a & -h \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Pi \equiv (x-0)(-ah+ah) - (y+a)(ah+ah) + (z-h)(-a^2 - a^2) = 0.$$

$$\Pi \equiv az + hy = 0.$$



El volum  $V$  del cilindroide limitat en la seua part superior per la superfície  $z = f(x, y)$ ; en la part inferior pel plànel  $z = 0$  i

lateralment per la superfície cilíndrica recta que talla  $z = 0$  en el recinte  $R$  és:

$$V = \iint_R f(x, y) dy \cdot dx.$$

La superfície  $R$  és mitja circumferència de radi  $a$ :

$$-a \leq y \leq 0, \quad x^2 + y^2 = a^2$$

$$z = \frac{-h}{a}y.$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \left( \frac{-h}{a}y \right) dx \cdot dy &= \int_{-a}^0 \left( \frac{-h}{a}yx \right) \Bigg|_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dy = \frac{h}{a} \int_{-a}^0 -2y\sqrt{a^2-y^2} dy = \\ &= \frac{h}{a} \left( \frac{2}{3} \sqrt{(a^2-y^2)^3} \right) \Bigg|_{-a}^0 = \frac{2}{3}ha^2. \end{aligned}$$

92.- Siga  $\{x_n\}$  la successió definida per:

$$x_0 = -\frac{1}{2}, x_1 = 1, x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1} + 3 - 2n.$$

Calculeu el límit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^{2n}} \right) \cdot x_n$

Solució:

La successió és recurrent. Determinem el terme general.

$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n + 3 - 2(n+1)$$

$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n - 2n + 1$$

$$x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1} + 3 - 2n$$

Restant les dues expressions:

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - 11x_n + 6x_{n-1} - 2$$

$$x_{n+3} = 6x_{n+2} - 11x_{n+1} + 6x_n - 2$$

Restant les dues expressions:

$$x_{n+3} = 7x_{n+2} - 17x_{n+1} + 17x_n - 6x_{n-1}.$$

L'equació característica de la successió recurrent és:

$$x^4 = 7x^3 - 17x^2 + 17x - 6.$$

Aplicant la regla de Ruffini les solucions de l'equació són:

$$x = 1, 1, 2, 3.$$

Aleshores el terme general de la successió és:

$$x_n = A \cdot 1^n + B \cdot n \cdot 1^n + C \cdot 2^n + D \cdot 3^n.$$

Determinem A, B, C, D.

$$x_2 = 5 \cdot 1 - 6 \left( -\frac{1}{2} \right) + 3 - 2 = 9.$$

$$x_3 = 5 \cdot 9 - 6 \cdot 1 + 3 - 4 = 38.$$

$$\text{Si } n = 0 \quad \frac{-1}{2} = A + C + D$$

$$\text{Si } n = 1 \quad 1 = A + B + 2C + 3D$$

$$\text{Si } n = 2 \quad 9 = A + 2B + 4C + 9D$$

$$\text{Si } n = 3 \quad 38 = A + 3B + 8C + 27D$$

Resolent el sistema format per les 4 equacions:

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = -1 \\ C = -\frac{3}{2} \\ D = 2 \end{cases} \text{ Aleshores, } x_n = -1 \cdot 1^n + -1 \cdot n \cdot 1^n - \frac{3}{2} \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n$$

$$x_n = -1 - n - \frac{3}{2} \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^{2n}} \right) \cdot x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} \right) \left( -1 - n - \frac{3}{2} \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(4^n + 3^n) \left( -1 - n - \frac{3}{2} 2^n + 2 \cdot 3^n \right)}{12^n} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-1 \cdot 4^n - n 4^n - \frac{3}{2} 8^n + 2 \cdot 12^n - 1 \cdot 3^n - n 3^n - \frac{3}{2} 6^n + 2 \cdot 9^n}{12^n} \right) =$$

Dividint numerador i denominador per  $12^n$  :

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-1 \left( \frac{4}{12} \right)^n - \frac{n}{3^n} \left( \frac{4}{4} \right)^n - \frac{3}{2} \left( \frac{8}{12} \right)^n + 2 \left( \frac{12}{12} \right)^n - 1 \left( \frac{3}{12} \right)^n - \frac{n}{4^n} \left( \frac{3}{3} \right)^n - \frac{3}{2} \left( \frac{6}{12} \right)^n + 2 \left( \frac{9}{12} \right)^n}{\left( \frac{12}{12} \right)^n} \right) = 2$$

93.-

a) Estudieu i representeu la funció,  $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .

b) Calculeu la longitud d'arc de la corba anterior entre  $x = 2$  y  $x = 4$ .  
Oposicions Cantàbria 2006.

Solució:

a)

Domini:

$$\text{Dom } f(x) = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{e^x - 1}{e^x + 1} > 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / e^x > 1 \right\} = ]0, +\infty[.$$

La funció es contínua i derivable en  $]0, +\infty[$ .

$$f'(x) = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}, \quad f''(x) = \frac{-2e^{3x} - 2e^x}{(e^{2x} - 1)^2} = \frac{-2e^x(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} - 1)^2}.$$

Punts de tall amb l'eix d'abscisses:

$f(x) = 0$  si  $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1$ , esta equació no té solució. Aleshores la funció no té punts de tall amb els eixos coordenats.

Monotonia i extrems locals:

Notem que  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in ]0, +\infty[$ . Per tant la funció és creixent en el seu domini.

Concavitat, convexitat, punts d'inflexió:

$f''(x) < 0$ ,  $\forall x \in ]0, +\infty[$ . Per tant la funció és concava en el seu domini.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) \stackrel{\text{Hòpital}}{=} \ln(1) = 0$$

Aleshores  $y = 0$  és una asímptota horitzontal quan  $x$  tendeix a  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ln \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) \stackrel{\text{Hòpital}}{=} \ln(0) = -\infty.$$

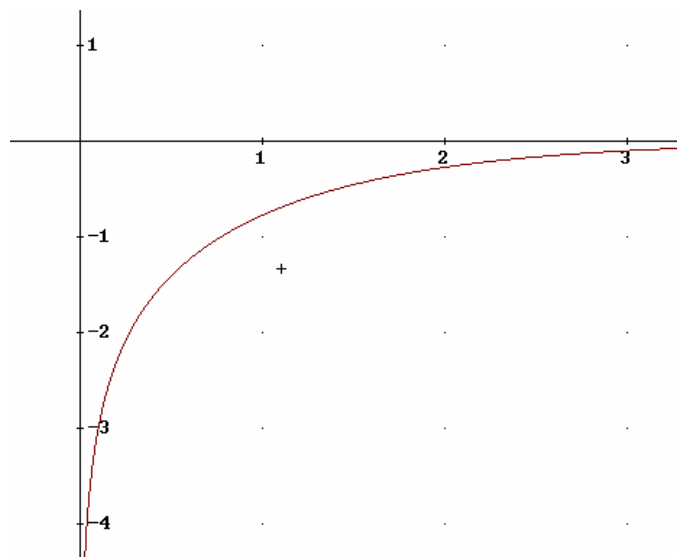
Aleshores  $x = 0$  és una asímptota vertical quan  $x$  s'aproxima a 0 per la dreta.

b) La longitud d'arc és igual a:

$$\int_2^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_2^4 \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)(e^x - 1)} dx =$$

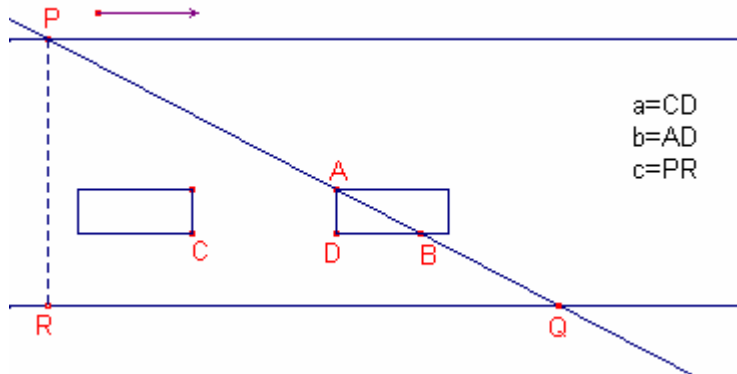
Efectuant el canvi  $t = e^x$  i resolent una integral racional amb arrels reals simples:

$$\int_2^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \ln(e^4 + 1) - 2.$$



94.- Calculeu el temps necessari per a creuar en línia recta i amb la mínima velocitat un carrer d'amplària  $c$  metres, per la que circulen en una sola direcció i per un únic carril, automòbils amb velocitat  $v$ , d'amplària  $b$  i espaiats un d'altre  $a$  metres. Oposicions València 2001.

Solució:



Siga  $w$  la velocitat del vianant (constant).

Hem de creuar en diagonal.

A fi que la velocitat  $w$  siga mínima el temps ha de ser màxim.

Siga  $\alpha$  l'angle que forma el costat del carrer i la trajectòria del vianant.

L'espai recorregut pel vianant és  $e = \overline{PQ} = \frac{c}{\sin \alpha}$

Hem d'arribar a la part de darrere  $A$  del primer automòbil.

El segon cotxe la part de davant  $C$  ha de passar per  $D$  quan el vianant passe per  $B$

$$\overline{CB} = \overline{CD} + \overline{DB} = a + \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha}$$

El temps que tarda l'automòbil d'anar de  $C$  a  $B$  és:

$$t = \frac{a + \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha}}{v}$$

L'espai recorregut pel vianant de  $A$  a  $B$  és:

$$\overline{AB} = \frac{b}{\sin \alpha}$$

Aquest temps és el que tarda el vianant d'anar de  $A$  a  $B$ .

Aleshores la velocitat del vianant és:

$$w = \frac{\overline{AB}}{t} = \frac{\frac{b}{\sin \alpha}}{\frac{a + \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha}}{v}} = \frac{bv}{a \cdot \sin \alpha + b \cdot \cos \alpha}$$

Considerem la funció  $w(\alpha) = \frac{bv}{a \cdot \sin \alpha + b \cdot \cos \alpha}$   $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right]$ . Determinem el mínim de la funció:

$$w'(\alpha) = \frac{-bv(a \cdot \cos \alpha - b \cdot \sin \alpha)}{(a \cdot \sin \alpha + b \cdot \cos \alpha)^2}$$

$$w'(\alpha) = 0 \text{ si } a \cdot \cos \alpha - b \cdot \sin \alpha = 0, \text{ si } \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}. \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$$

$w''\left(\arctg\frac{a}{b}\right) > 0$ . Aleshores,  $\alpha = \arctg\frac{a}{b}$  és un mínim de la funció.

Aleshores la velocitat mínima és:

$$w_0 = w\left(\arctg\frac{a}{b}\right) = \frac{bv}{a \cdot \sin\left(\arctg\frac{a}{b}\right) + b \cdot \cos\left(\arctg\frac{a}{b}\right)}.$$

Si  $\alpha = \arctg\frac{a}{b}$ , aleshores,  $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ,  $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .

$$w_0 = \frac{bv}{a \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + b \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{bv\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}.$$

L'espai recorregut pel vianant amb aquest angle és

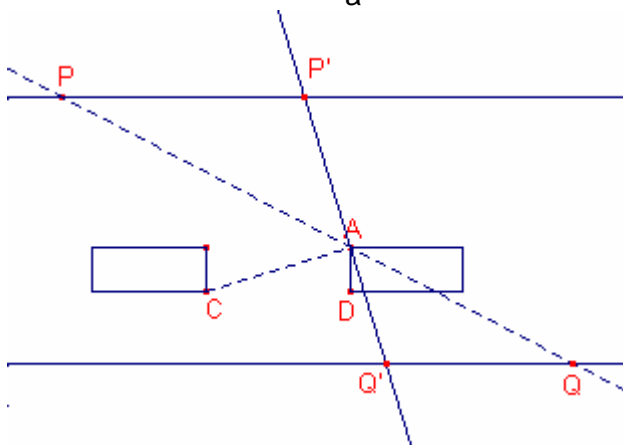
$$\overline{PQ} = \frac{c}{\sin\alpha} = \frac{c}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

El temps mínim és:

$$t_0 = \frac{\overline{PQ}}{w_0} = \frac{\frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{a}}{\frac{bv\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}} = \frac{c(a^2+b^2)}{abv}.$$

Notem que la solució és quan l'angle de la trajectòria és perpendicular a la direcció C

A que té una inclinació  $\operatorname{tg}\frac{b}{a}$ .



95.- Calculeu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left\{ \prod_{k=1}^n \left( \frac{k^2 + \sqrt{k^4 + n^4}}{n^2} \right)^k \right\}^{\frac{1}{n^2}}$ .

Revista OIM problema 131.

Solució:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left\{ \prod_{k=1}^n \left( \frac{k^2 + \sqrt{k^4 + n^4}}{n^2} \right)^k \right\}^{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left\{ \prod_{k=1}^n \left( \frac{k^2 + \sqrt{k^4 + n^4}}{n^2} \right)^{\frac{k}{n^2}} \right\} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left( \frac{k^2 + \sqrt{k^4 + n^4}}{n^2} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left( \left( \frac{k}{n} \right)^2 + \sqrt{\left( \frac{k}{n} \right)^4 + 1} \right) =$$

Transformant el límit en una integral Riemann:

$$= \int_0^1 x \cdot \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 1}) dx =$$

Integrant per parts:

$$\int x \cdot \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 1}) dx = \frac{x^2 \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 1})}{2} - \int \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}} dx =$$

$$u = \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 1}), \quad du = \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 1}} dx$$

$$dv = x \cdot dx, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{x^2 \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 1})}{2} - \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{2} + C$$

$$= \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}.$$

96.- Determineu el menor valor k a fi que no existesca cap nombre real x verificant

$$k < \frac{2x-7}{2x^2-2x-5} < 1.$$

Olimpiada espanyola 1997. Fase local València.

Solució:

Considerem la funció  $f(x) = \frac{2x-7}{2x^2-2x-5}$ . Estudiem-la.

El domini, continuïtat i derivabilitat de la funció és  $\mathbb{R} \sim \left\{ \frac{1-\sqrt{11}}{2}, \frac{1+\sqrt{11}}{2} \right\}$

Punt de tall amb l'eix d'ordenades  $\left( 0, \frac{7}{5} \right)$

Punt de tall amb l'eix d'abscisses  $\left( \frac{7}{2}, 0 \right)$

$$f'(x) = -\frac{4(x^2-7x+6)}{(2x^2-2x-5)^2}$$

Monotonia i extrems locals:

La funció és estrictament decreixent en  $\left( ]-\infty, 1[ \sim \left\{ \frac{1-\sqrt{11}}{2} \right\} \right) \cup ]6, +\infty[$

La funció és estrictament creixent en  $]1, 6[ \sim \left\{ \frac{1+\sqrt{11}}{2} \right\}$

En  $x = 1$  hi ha un mínim relatiu estricte que és el punt  $(1, 1)$

En  $x = 6$  hi ha un màxim relatiu estricte que és el punt  $\left( 6, \frac{1}{11} \right)$ .

Asímtotes:

$x = \frac{1-\sqrt{11}}{2}$  és una asímtota vertical  $\lim_{x \rightarrow \frac{1-\sqrt{11}}{2}^-} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{1-\sqrt{11}}{2}^+} f(x) = +\infty$

$x = \frac{1+\sqrt{11}}{2}$  és una asímtota vertical  $\lim_{x \rightarrow \frac{1+\sqrt{11}}{2}^-} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{1+\sqrt{11}}{2}^+} f(x) = -\infty$

$y = 0$  és una asímtota horitzontal,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

La corba està sota l'asímtota quan  $x \rightarrow -\infty$ .

La corba està damunt l'asímtota quan  $x \rightarrow +\infty$ .

Aleshores:

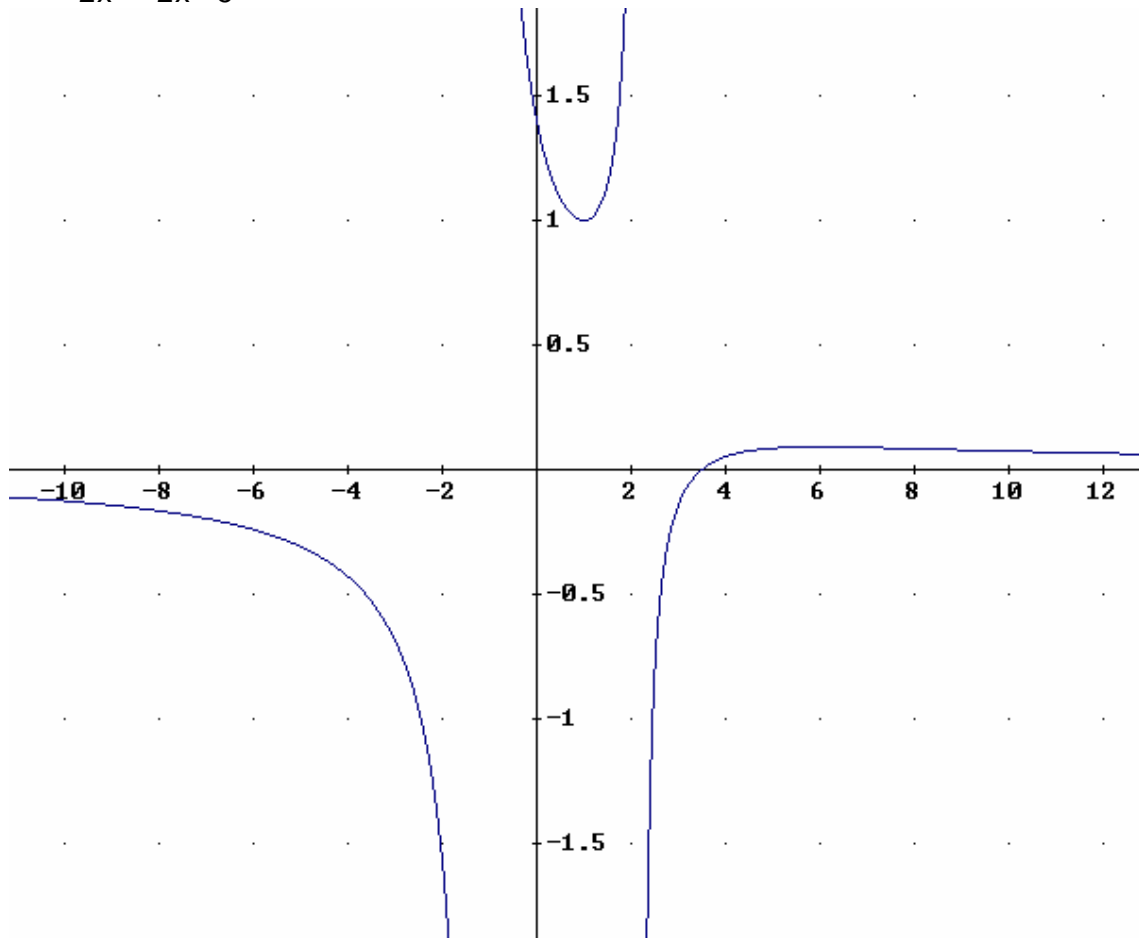
Si  $x < \frac{1-\sqrt{11}}{2}$ , per ser decreixent,  $f(x) < 0$

Si  $\frac{1-\sqrt{11}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{11}}{2}$ , per ser  $x = 1$  mínim relatiu,  $f(x) \geq f(1) = 1$ .

Si  $x > \frac{1+\sqrt{11}}{2}$ , per ser  $x = 6$  màxim relatiu,  $f(x) \leq f(6) = \frac{1}{11}$ .

Notem que no existeix cap real  $x$  tal que

$$\frac{1}{11} < \frac{2x-7}{2x^2-2x-5} < 1 \text{ i } k = \frac{1}{11} \text{ és el menor que ho compleix.}$$



97.- Calculeu el límit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(1 + \frac{4}{n}\right) \left(1 + \frac{6}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{2n}{n}\right)}$$

Solució:

$$\text{Siga } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(1 + \frac{4}{n}\right) \left(1 + \frac{6}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{2n}{n}\right)} = \lambda$$

$$\begin{aligned} \ln \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(1 + \frac{4}{n}\right) \left(1 + \frac{6}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{2n}{n}\right)} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{2k}{n} \right) \end{aligned}$$

Considerem la partició:  $x_0 = 1, x_1 = 1 + \frac{2}{n}, x_2 = 1 + \frac{2 \cdot 2}{n}, \dots, x_n = 1 + \frac{2n}{n} = 3$

$$x_k - x_{k-1} = \frac{2}{n}$$

Per tant el límit és una suma de Riemann:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{2k}{n} \right) &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{n} \ln \left( 1 + \frac{2k}{n} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 \ln(x) dx = \frac{1}{2} (x \cdot \ln x - x) \Big|_1^3 = \frac{1}{2} (3 \ln 3 - 3 - (-1)) = \ln \left( \frac{\sqrt{27}}{e} \right) \end{aligned}$$

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x$$

$u = \ln x$   
 $dv = dx$

Per tant:

$$\lambda = \frac{\sqrt{27}}{e}.$$

98.- Trobeu totes les funcions reals  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que compleixen que  $f(1) = 1$  i tals que  $f(x + y) = 3^y f(x) + 2^x f(y)$  per a tots els reals  $x, y$ .

Solució:

Siga  $y = 1$ .

$$f(x + 1) = 3^1 \cdot f(x) + 2^x \cdot f(1) = 3 \cdot f(x) + 2^x.$$

Siga  $x = 1, y = x$ .

$$f(1 + x) = 3^x \cdot f(1) + 2^1 \cdot f(x) = 2 \cdot f(x) + 3^x.$$

Restant ambdues expressions:

$$0 = f(x) + 2^x - 3^x.$$

Aleshores,  $f(x) = 3^x - 2^x$ .

99.- Determineu el nombre de solucions reals de l'equació  $x^2 = x \cdot \sin x + \cos x$ .

Solució:

Considerem la funció  $f(x) = x^2 - x \cdot \sin x - \cos x$

$f(x)$  és contínua i derivable en tots el real.

La funció és simètrica respecte de l'eix d'ordenades.

$$f'(x) = 2x - x \cdot \cos x$$

$$f'(x) = x(2 - \cos x).$$

Com que  $2 - \cos x > 0$  per a tot  $x$  nombre real.

$f'(x) > 0$  si  $x > 0$ . La funció és estrictament creixent quan  $x \in ]0, +\infty[$

$f'(x) < 0$  si  $x < 0$ . La funció és estrictament decreixent quan  $x \in ]-\infty, 0[$

$$f(0) = -1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2} > 0$$

$$f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

Per ser la funció estrictament creixent en  $]0, \frac{\pi}{2}[$  existeix un únic punt  $c \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  tal que

$$f(c) = 0.$$

$$\text{Si } x \geq \frac{\pi}{2}, f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0.$$

Aleshores el punt  $x = c$  és l'únic punt de tall de la funció  $f(x)$  quan  $x \in ]0, +\infty[$ .

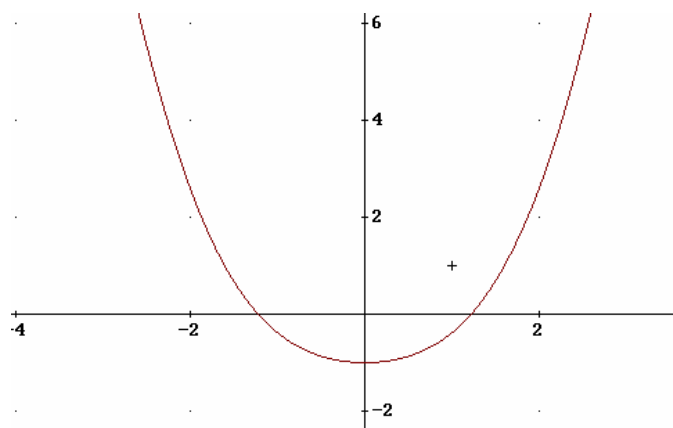
Per simetria de la funció, el punt  $-c \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$  és l'únic punt de tall de la funció  $f(x)$

quan  $x < 0$ .

Per tant l'equació  $x^2 = x \cdot \sin x + \cos x$  té dues úniques solucions en els reals i les

solucions són oposades i es troben entre  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Gràfica de la funció:



100.- Per a quins valors de  $n \in \mathbb{N}$  les tangents a la corba  $f(x) = x^n$  cobreixen el plànol?.

Solució:

Si  $n = 1$ ,  $f(x) = x$  les rectes tangents a la corba en qualsevol punt de la corba és  $f(x)$ . Aleshores les rectes tangent a la corba no cobreixen el plànol.

Siga  $P(a,b)$  un punt qualsevol del plànol volen veure si existeix una recta tangent a la corba tal que  $P$  pertany a aquesta recta.

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

La recta tangent a la corba en el punt  $A(x_0, f(x_0))$  de la corba té per equació:

$$r_T \equiv y - x_0^n = nx_0^{n-1}(x - x_0).$$

Si el punt  $P(a,b)$  pertany a la recta  $r_T$ , satisfà la seua equació:

$$b - x_0^n = nx_0^{n-1}(a - x_0)$$

$$(n-1)x_0^n - nax_0^{n-1} + b = 0 \quad (1)$$

Vegem si l'equació (1) té solució  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ .

Considerem la funció  $g(x) = (n-1)x^n - nax^{n-1} + b$

Estudiem aquesta funció.

La funció és contínua i derivable en  $\mathbb{R}$

$$g'(x) = n(n-1)x^{n-1} - n(n-1)ax^{n-2}.$$

$$g'(x) = n(n-1)x^{n-2}(x - a)$$

Suposem  $n$  parell.

Estudiem la monotonía de  $g(x)$ .

Si  $n = 2$ .

$g'(x) > 0$  si  $x \in ]a, +\infty[$ , aleshores la funció és creixent si  $x \in ]a, +\infty[$ .

$g'(x) < 0$  si  $x \in ]-\infty, a[$ , aleshores la funció és decreixent si  $x \in ]-\infty, a[$ .

$x = a$  és un mínim de la funció  $g(x)$ .

$$g(a) = -a^2 + b$$

Si  $g(a) > 0$  la funció no té punts de tall, és a dir, si  $a^2 < b$  l'equació (1) no té solució, aleshores, les tangents no recobreixen el plànol.

Si  $n \geq 4$ .

Si  $a < 0$

$g'(x) > 0$  si  $x \in ]a, +\infty[ \sim \{0\}$ , aleshores la funció és creixent si  $x \in ]a, +\infty[$ .

$g'(x) < 0$  si  $x \in ]-\infty, a[$ , aleshores la funció és decreixent si  $x \in ]-\infty, a[$ .

$x = a$  és un mínim de la funció  $g(x)$ .

$$g(a) = -a^n + b$$

Si  $g(a) > 0$  la funció no té punts de tall, és a dir, si  $a^n < b$  l'equació (1) no té solució, aleshores, les tangents no recobreixen el plànol.

Si  $a > 0$

$g'(x) > 0$  si  $x \in ]a, +\infty[$ , aleshores la funció és creixent si  $x \in ]a, +\infty[$ .

$g'(x) < 0$  si  $x \in ]-\infty, a[ \sim \{0\}$ , aleshores la funció és decreixent si  $x \in ]-\infty, a[$ .

$x = a$  és un mínim de la funció  $g(x)$ .

$$g(a) = -a^n + b$$

Si  $g(a) > 0$  la funció no té punts de tall, és a dir, si  $a^n < b$  l'equació (1) no té solució, aleshores, les tangents no recobreixen el plànel.

Aleshores si  $n$  és parell les tangents no recobreixen el plànel.

Suposem  $n$  imparell  $n \geq 3$ .

Si  $a < 0$

$g'(x) > 0$  si  $x \in ]-\infty, a[ \cup ]0, +\infty[$ , aleshores la funció és creixent si  $x \in ]-\infty, a[ \cup ]0, +\infty[$

$g'(x) < 0$  si  $x \in ]a, 0[$ , aleshores la funció és decreixent si  $x \in ]a, 0[$ .

$x = a$  és un màxim de la funció  $g(x)$ .

$x = 0$  és un mínim de la funció  $g(x)$

$$g(0) = b, \quad g(a) = -a^n + b.$$

Suposem que  $b \leq 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

Existeix  $x_1 \in ]0, +\infty[$  tal que  $g(x_1) = 0$ .

Suposem que  $b > 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

Existeix  $x_2 \in ]-\infty, 0[$  tal que  $g(x_2) = 0$ .

Si  $a > 0$

$g'(x) > 0$  si  $x \in ]-\infty, 0[ \cup ]a, +\infty[$ , aleshores la funció és creixent si  $x \in ]-\infty, 0[ \cup ]a, +\infty[$ .

$g'(x) < 0$  si  $x \in ]0, a[$ , aleshores la funció és decreixent si  $x \in ]0, a[$ .

$x = a$  és un mínim de la funció  $g(x)$ .

$x = 0$  és un màxim de la funció  $g(x)$

$$g(0) = b, \quad g(a) = -a^n + b.$$

Suposem que  $b \leq 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

Existeix  $x_3 \in ]a, +\infty[$  tal que  $g(x_3) = 0$ .

Suposem que  $b > 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

Existeix  $x_4 \in ]-\infty, 0[$  tal que  $g(x_4) = 0$ .

Si  $a = 0$

Considerem la funció  $g(x) = (n-1)x^n + b$

$$g(x) = 0 \text{ si } x = \sqrt[n]{\frac{b}{n-1}} \in \mathbb{R}.$$

Si  $n$  és imparell  $n \geq 3$  tenim que  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , la funció  $g(x)$  té punts de tall amb l'eix d'abscisses.

Aleshores, si  $n$  és imparell  $n \geq 3$  les tangents a la corba  $f(x) = x^n$  recobreixen el plànel.