

Problemes d'anàlisi 1

1.- Demostreu que no existeix cap funció contínua positiva $f(x)$, $0 \leq x \leq 1$ tal que verifiqui simultàniament:

$$\int_0^1 f(x) dx = 1, \quad \int_0^1 x \cdot f(x) dx = a, \quad \int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx = a^2 \quad \text{on } a \text{ és un nombre real.}$$

2.-

a) Demostreu que de tots els triangles amb la mateixa base i el mateix angle oposat, l'isòsceles té àrea màxima.

b) Proveu que entre tots els triangles inscrits en una circumferència l'equilàter té àrea màxima.

3.- Determineu el volum del sòlid generat al girar al voltant de l'eix OX, la regió del pla que resulta de la intersecció de l'interior de $x^2 + y^2 = 17$, $x^2 + y^2 = 17x$

4.- Calculeu el límit: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^3 + ax^2} - \sqrt[3]{x^3 - bx^2}$.

5.- Siga $f(x) = \int_0^x (1+t^3)^{-1/2} dt$ $x \geq 0$.

a) Proveu que $f(x)$ és estrictament creixent $\forall x \geq 0$.

b) Siga $g(x)$ la funció inversa de $f(x)$. Proveu que $g''(x)$ és proporcional a $g^2(x)$ i calculeu la constant de proporcionalitat.

6.- Siga $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+19) \leq f(x)+19$, $f(x+94) \geq f(x)+94$.

Demostreu que $f(x+1) = f(x)+1$.

7.- Siga la funció $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

a) Calculeu $S(n)$ l'àrea limitada per la corba $f(x)$, $x=1$ i $x=n$, $n > 1$.

b) Calculeu $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n)$.

8.- Un dipòsit inicialment ple amb 1000 litres d'aigua salada la concentració o salinitat del qual és de dos grams de sal per litre. Per a reduir la salinitat es fa entrar aigua pura en el dipòsit a raó de 5 litres per minut, al mateix temps per un orifici el dipòsit evacua el mateix cabdal. Determineu la quantitat de sal continguda en el dipòsit en funció del temps i calculeu el temps que ha de transcórrer a fi que només queden 200 grams de sal.

9.- Siga $f(x) = 5(x+1)^2 + \frac{a}{(x+1)^5}$ on a és un nombre real positiu.

Quin és valor mínim per a a a fi que $f(x) \geq 24$ quan $x \geq 0$.

10.- La funció $f(x) = 2 \cdot \arctg x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ és constant per a $x \geq 1$.