

11.- Determineu el polinomi de grau 3 que passa pels punts:

X	4	6	8	10
Y	1	3	8	20

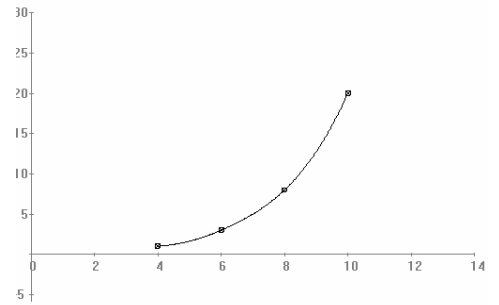
- a) Utilitzant la fórmula de Newton.
- b) Utilitzant la fórmula de Lagrange.

Solució:

a) Utilitzant la fórmula de Newton: $h = 2$, $q = \frac{x-4}{2}$

Construïm la taula de diferències:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
4	1	2	3	4
6	3	5	7	
8	8	12		
10	20			



$$P_3(x) = 1 + 2 \frac{x-4}{2} + 3 \frac{x-4}{2} \left(\frac{x-4}{2} - 1 \right) + 4 \frac{x-4}{2} \left(\frac{x-4}{2} - 1 \right) \left(\frac{x-4}{2} - 2 \right) =$$

$$= \frac{2x^3 - 27x^2 + 142x - 240}{24}$$

$x_{i+1} - x_i = h$.

$x_i = x_0 + hi$.

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{q}{1!} + \Delta^2 y_0 \frac{q(q-1)}{2!} + \Delta^3 y_0 \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} + \dots + \Delta^n y_0 \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}$$

$q = \frac{x - x_0}{h}$.

b) Utilitzant la fórmula de Lagrange.

$$L_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$L_3(x) = 1 \frac{(x-6)(x-8)(x-10)}{(4-6)(4-8)(4-10)} + 3 \frac{(x-4)(x-8)(x-10)}{(6-4)(6-8)(6-10)} + 8 \frac{(x-4)(x-6)(x-10)}{(8-4)(8-6)(8-10)} + 20 \frac{(x-4)(x-6)(x-8)}{(10-4)(10-6)(10-8)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-6)(x-8)(x-10)}{-48} + \frac{3(x-4)(x-8)(x-10)}{16} + \frac{8(x-4)(x-6)(x-10)}{-16} + \frac{20(x-4)(x-6)(x-8)}{48}$$

$$L_3(x) = \frac{2x^3 - 27x^2 + 142x - 240}{24}$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

12.- Utilitzant la fórmula d'interpolació de Newton calculeu:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

Solució:

$$\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = (n+1)^2.$$

$$\Delta^2 S_n = ((n+1)+1)^2 - (n+1)^2 = 2n+3.$$

$$\Delta^3 S_n = (2(n+1)+3) - 2n+3 = 2.$$

$$\Delta^n S_n = 0 \quad \text{si } n \geq 4.$$

Aleshores, S_n és un polinomi de tercer grau en n .

Taula:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1	$S_1 = 1$	$\Delta S_1 = 4$	$\Delta^2 S_1 = 5$	$\Delta^3 S_1 = 2$
2	$S_2 = 5$	$\Delta S_2 = 9$	$\Delta^2 S_2 = 7$	
3	$S_3 = 14$	$\Delta S_3 = 16$		
4	$S_4 = 30$			

$$\begin{aligned} S_n &= S_1 + \Delta S_1 \cdot (n-1) + \Delta^2 S_1 \frac{(n-1)(n-2)}{2!} + \Delta^3 S_1 \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} = \\ &= 1 + 4(n-1) + 5 \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} = \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Polinomi de Newton:

$x_{i+1} - x_i = h.$
 $x_i = x_0 + hi.$

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{q}{1!} + \Delta^2 y_0 \frac{q(q-1)}{2!} + \Delta^3 y_0 \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} + \dots + \Delta^n y_0 \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}$$

$$q = \frac{x - x_0}{h}.$$

2b.-

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

Solució: $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$

2c.-

$$S_n = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4.$$

Solució: $S_n = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$

13.- Calculeu el volum de la corba $\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases}$ al girar 360° sobre l'eix OX.

Solució 1:

Per la simetria de la figura podem integrar entre 0 i $\pi/2$ i multiplicar el resultat per 2.

És a dir integra entre $t = \frac{\pi}{2}$ i $t = 0$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{\pi/2}^0 (b \cdot \sin t)^2 \cdot (-a \cdot \sin t) dt = 2\pi \int_{\pi/2}^0 -ab^2 \sin^3 t dt = -2\pi ab^2 \int_{\pi/2}^0 \sin^3 t dt = \\ &= -2\pi ab^2 \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2 t) \sin t dt = 2\pi ab^2 \int_0^{\pi/2} \sin t - \cos^2 t \cdot \sin t dt = \\ &= 2\pi ab^2 \left(-\cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3} \pi ab^2 u^3. \end{aligned}$$

Solució 2:

Aquesta corba és l'el·lipse, la seua equació implícita és:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

El volum és:

$$V = 2\pi \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = 2\pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{a^2} \right) \Big|_0^a = \frac{4}{3} \pi ab^2 u^3.$$

14.-

a) Calculeu l'àrea afitada entre l'eix OX i un arc de la cicloide.

b) Calculeu la longitud d'un arc de la cicloide.

L'equació de la cicloide és

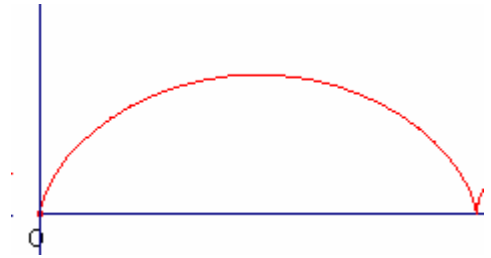
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

Solució:

a)

Per a $y = 0$

$$0 = a(1 - \cos t), \quad \cos t = 1, \quad t = 0, 2\pi.$$



L'àrea és:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = a^2 \left(t - 2\sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2 \text{ u}^2. \end{aligned}$$

b)

La longitud és:

$$\begin{aligned} L &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\sin t)^2 + (a(1 - \cos t))^2} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + 1 + \cos^2 t - 2\cos t} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{4(1 - \cos t)}{2}} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 2a \left(-2\cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos \pi - \cos 0) = 8a. \end{aligned}$$

15.-

a) Calculeu l'àrea afitada per la corba $\rho = a(1 + \cos \omega)$ $\omega \in [0, 2\pi]$ (la cardioide).

b) Calculeu el volum engendrat per la cardioide al girar sobre l'eix polar.

Solució:

a)

D'acord amb la gràfica de és el doble de l'àrea de la corba $\rho = a(1 + \cos \omega)$ entre $\omega = 0$ i $\omega = \pi$.

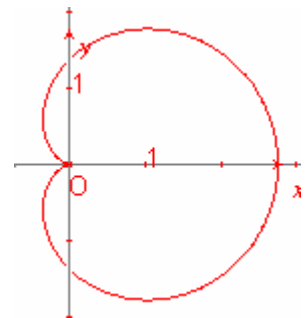
$$S = 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^\pi \rho^2 d\omega \right) = \int_0^\pi (a(1 + \cos \omega))^2 d\omega = a^2 \int_0^\pi (1 + \cos^2 \omega + 2 \cos \omega) d\omega =$$

$$= a^2 \int_0^\pi \left(1 + \frac{1 + \cos 2\omega}{2} + 2 \cos \omega \right) d\omega = \left(\omega + \frac{1}{2} \omega + \frac{1}{4} \sin 2\omega + 2 \sin \omega \right) \Big|_0^\pi = \frac{3\pi a^2}{2} u^2.$$

b)

El volum és:

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_0^\pi (a(1 + \cos \omega))^3 \sin \omega d\omega = \frac{2a^3}{3} \pi \left(-\frac{1}{4} (1 + \cos \omega)^4 \right) \Big|_0^\pi = \frac{8a^3}{3}.$$

L'àrea de la figura limitada per $\rho = f(\omega)$ entre $\omega = \omega_1$, $\omega = \omega_2$.

$$S = \frac{1}{2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \rho^2 d\omega$$

Volum de corbes en forma polar:

El volum de revolució de la corba $\rho = f(\omega)$ al girar sobre l'eix polar entre $\omega = \omega_1$, $\omega = \omega_2$.

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_{\omega_1}^{\omega_2} \rho^3 \sin \omega d\omega.$$

16.- Demostreu que si la funció $f(x) = \sin(x) + \cos(bx)$ és periòdica, aleshores b és racional.

Solució:

Si $T \neq 0$ el període de la funció, $f(x + T) = f(x)$, aleshores,

$$\sin(x + T) + \cos(b(x + T)) = \sin(x) + \cos(bx)$$

Substituint en la igualtat $x = 0$, $x = -T$

$$\sin(T) + \cos(bT) = 1$$

$$-\sin(T) + \cos(bT) = 1$$

Sumant ambdues igualtats:

$$\cos(bT) = 1, \text{ és a dir, } bT = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Restant les igualtats:

$$\sin(T) = 0, \text{ és a dir, } T = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Si $T \neq 0$, aleshores, $n \neq 0$. Per tant,

$b\pi n = 2\pi m$, simplificant,

$$b = \frac{2m}{n} \in \mathbb{Q}.$$

17.- Donada la corba $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, es tracen tangents a ella que tallen els eixos OX

OY en els punts A, i B. Determineu el punt de tangència per al qual el segments \overline{AB} que es troba entre els semieixos positius, té longitud mínima, determineu la longitud del segment \overline{AB} .

Solució:

La corba és una el·lipse, de semieixos a, b.

Siga $P(x_0, y_0)$ un punt de l'el·lipse corresponent al primer quadrant, $x_0, y_0 > 0$.

L'equació de la recta tangent a l'el·lipse que passa per P és:

$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ que talla els eixos coordinats en els punts:

$$A\left(\frac{a^2}{x_0}, 0\right), B\left(0, \frac{b^2}{y_0}\right).$$

La longitud del segment \overline{AB} és:

$$L = \sqrt{\frac{a^4}{x_0^2} + \frac{b^4}{y_0^2}}, \text{ Minimitzar } L \text{ és equivalent a minimitzar } L^2. L^2 = \frac{a^4}{x_0^2} + \frac{b^4}{y_0^2}.$$

Substituint $P(x_0, y_0)$ en l'equació de l'el·lipse tenim que $y_0^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2)$.

Substituint en L^2 :

$$L^2 = \frac{a^4}{x_0^2} + \frac{b^4}{y_0^2} = \frac{a^4 y_0^2 + b^4 x_0^2}{x_0^2 y_0^2} = a^2 \left(\frac{a^2}{x_0^2} + \frac{b^2}{a^2 - x_0^2} \right), \quad x_0 \in]0, a[.$$

Siga $t = x_0^2$, $t \in]0, a^2[$

El problema queda reduït a calcular el mínim de la funció:

$$f(t) = a^2 \left(\frac{a^2}{t} + \frac{b^2}{a^2 - t} \right) \text{ en l'interval } t \in]0, a^2[.$$

Calculem la primera derivada i igualem-la a zero:

$$f'(t) = a^2 \left(-\frac{a^2}{t^2} + \frac{b^2}{(a^2 - t)^2} \right) = 0, \text{ aleshores, } \frac{a^2}{t^2} = \frac{b^2}{(a^2 - t)^2}:$$

$$\left(\frac{a^2 - t}{t} \right)^2 = \left(\frac{b}{a} \right)^2, \text{ aleshores, } \frac{a^2 - t}{t} = \pm \frac{b}{a}. \text{ Només és vàlida la primera solució ja que}$$

$$t \in]0, a^2[.$$

$$t = \frac{a^3}{a+b} \in]0, a^2[. \quad f''\left(\frac{a^3}{a+b}\right) > 0. \text{ Aleshores, } t = \frac{a^3}{a+b} \in]0, a^2[\text{ és un mínim.}$$

$x^2 = t$, aleshores, $x = a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$. Aleshores, el punt de tangència és:

$$P\left(a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right).$$

La longitud mínima del segment és:

$$L = \sqrt{\frac{a^4}{x_0^2} + \frac{b^4}{y_0^2}} = \sqrt{a(a+b) + b(a+b)} = \sqrt{(a+b)^2} = a+b.$$

18.- Siga la funció $f(x)$ contínua en $[0,1]$ tal que $f(0) = 0$ i derivable en $x \in]0,1[$.

Demostreu que si $f'(x)$ és creixent en $x \in]0,1[$ aleshores la funció $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ és creixent en $x \in]0,1[$.

Solució:

Aplicant el teorema del valor mig (Teorema de Lagrange), a la funció $f(x)$ en l'interval $[0, x]$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c), \quad c \in]0, x[.$$

Aleshores, $\frac{f(x)}{x} = f'(c)$ per a un valor $c \in]0, x[$.

Siga $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in]0,1[$

$$g'(x) = \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x} \frac{1}{x} = \frac{f'(x) - f'(c)}{x}, \quad c \in]0, x[$$

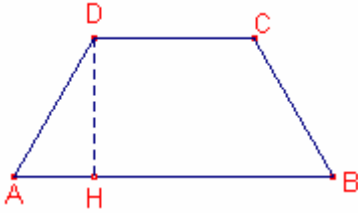
Com que $f'(x)$ és creixent en $x \in]0,1[$, i $c < x$, $f'(x) - f'(c) > 0$.

Aleshores, $g'(x) > 0$, $x \in]0,1[$

Per tant la funció $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ és creixent en $x \in]0,1[$.

19.- De tots els trapezis que tenen tres costats iguals determineu el d'àrea màxima.

Solució:



Siga a la longitud dels costats iguals.

El quadrat de costat a a compleix les condicions del problema la seua àrea és a^2 .

Siga l'angle $\alpha = \angle BAD$, l'angle que forma la base i un costat no paral·lel.

Siga $h = \overline{DH}$ altura del trapezi.

$$h = a \cdot \sin \alpha .$$

Siga $x = \overline{AH}$.

$x = a \cdot \cos \alpha$. Aleshores la base del trapezi és:

$$\overline{AB} = a + 2a \cdot \cos \alpha .$$

L'àrea del trapezi és:

$$S = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot h = \frac{a(1 + 2\cos\alpha) + a}{2} a \sin \alpha = a^2(1 + \cos \alpha) \sin \alpha .$$

Siga la funció àrea $f(x) = a^2(1 + \cos x) \sin x$.

Derivant i igualant a zero:

$$f'(x) = a^2(2\cos^2 x + \cos x - 1) .$$

$$f'(x) = 0 .$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 .$$

Resolent l'equació:

$$x = \frac{\pi}{3} .$$

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$, aleshores, $x = \frac{\pi}{3}$ és un màxim.

L'àrea màxima és:

$$S = a^2(1 + \cos 60^\circ) \sin 60^\circ = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} u^2 .$$

20.-

a) Si $f(x)$ és derivable en \mathbb{R} i $f'(x) = f(x)$ per a tot x , aleshores, existeix un nombre real c tal que $f(x) = c \cdot e^x$.

b) Determineu totes funcions reals que admeten derivada contínua en \mathbb{R} tals que per a tot x :

$$(f(x))^2 = \int_0^x \left((f(t))^2 + (f'(t))^2 \right) dt$$

Solució:

a)

Considerem la funció $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, derivable en tots els reals.

La seua derivada és:

$$F'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^x - f(x) \cdot e^x}{e^{2x}} = 0 \quad (\text{per hipòtesi } f'(x) = f(x)).$$

La funció és constant.

$F(x) = \frac{f(x)}{e^x} = c$, aleshores, existeix un nombre real c tal que $f(x) = c \cdot e^x$.

b)

$$(f(x))^2 = \int_0^x \left((f(t))^2 + (f'(t))^2 \right) dt$$

Derivant ambdós membres de la igualtat:

$$2 \cdot f(x) \cdot f'(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2.$$

$$(f(x))^2 + (f'(x))^2 - 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) = 0$$

$$(f(x) - f'(x))^2 = 0$$

Per tant, $f(x) = f'(x)$.

Aplicant el apartat a) $f(x) = c \cdot e^x$.