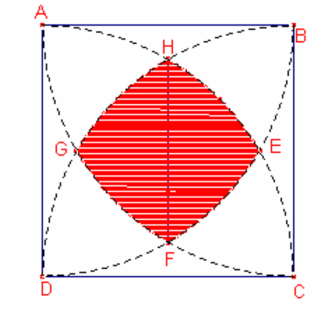
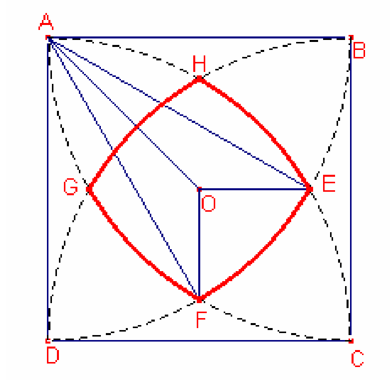


21.-

Els punts A, B, C, D són els vèrtexs d'un quadrat de costat $\overline{AB}=1$
Amb centres els vèrtexs i radis iguals a 1 dibuixem 4 circumferències.
La intersecció de les 4 circumferències determinen un quadrilàter curvilini EFGH. Determineu l'àrea del quadrilàter:

Solució 1:

Considerem la següent figura:



$\overline{AF}=\overline{AE}=\overline{AB}=1$. $\overline{AO}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'angle $\beta=\angle AOE=135^o$. Siga $\alpha=\angle AEO$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AOE}$, $\frac{\overline{AE}}{\sin\beta}=\frac{\overline{AO}}{\sin\alpha}$.

$\frac{1}{\sin 135^o}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, aleshores, l'angle $\alpha=\angle AEO=30^o$.

Per tant, l'angle $\gamma=\angle EAO=180^o–135^o–30^o=15^o$.

L'angle $\angle EAF=30^o$. Aleshores, l'àrea del sector AEF és:

$$\text{Àrea}_{\text{sec torAEF}}=\frac{\pi\cdot 1^2\cdot 30^o}{360^o}=\frac{\pi}{12}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEO}$ és:

$$\text{Àrea}_{AEO}=\frac{\overline{AE}\cdot\overline{AO}\cdot\sin\gamma}{2}=\frac{1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 15^o}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{1-\cos 30^o}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{8}.$$

L'àrea del recinte és:

$$\text{Àrea}=4\cdot\left(\text{Àrea}_{\text{sec tor}}-2\cdot\text{Àrea}_{AEO}\right).\quad \text{Àrea}=4\left(\frac{\pi}{12}-2\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{8}\right)=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+1.$$

Solució 2:

Considerem el plànol cartesià d'origen D.

El arc $\overset{\frown}{AHE}$ és un arc de circumferència $C_1\equiv x^2+y^2=1$

$$y=\sqrt{(1-x^2)}$$

El arc $\overset{\frown}{DFB}$ és un arc de circumferència $C_2\equiv x^2+(y-1)^2=1$

$$y=1-\sqrt{(1-x^2)}$$

Determinem el punt E amb el Derive:

$$\text{SOLVE}\left(\left[x^2+y^2=1,\ x^2+(y-1)^2=1\right],\ [x,\ y]\right)$$

$$\left[x=\frac{\sqrt{3}}{2}\wedge y=\frac{1}{2},\ x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\wedge y=\frac{1}{2}\right]$$

Aleshores $E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$. L'àrea del recinte és: $2\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\left(\sqrt{1-x^2}-\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\right)dx$.

Amb el Derive:

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}2\cdot\left(\sqrt{(1-x^2)}-\left(1-\sqrt{(1-x^2)}\right)\right)dx$$

$$\frac{\pi-3\cdot\sqrt{3}+3}{3}$$

$$\text{Àrea}=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+1.$$

22.- Proveu que $\sin^2(x+\alpha)+\sin^2(x+\beta)-2\cos(\alpha-\beta)\sin(x+\alpha)\sin(x+\beta)$ és constant per a tot x.

Solució:
Siga la funció $f(x)=\sin^2(x+\alpha)+\sin^2(x+\beta)-2\cos(\alpha-\beta)\sin(x+\alpha)\sin(x+\beta)$
$f(x)$ és contínua i derivable en R.
Vegem que la seua derivada és zero.

$$f'(x)=2\sin(x+\alpha)\cos(x+\alpha)+2\sin(x+\beta)\cos(x+\beta)-$$
$$-2\cos(\alpha-\beta)\left(\cos(x+\alpha)\sin(x+\beta)+\sin(x+\alpha)\cos(x+\beta)\right)$$

$$f'(x)=\sin(2x+2\alpha)+\sin(2x+2\beta)-2\cos(\alpha-\beta)\sin(2x+\alpha+\beta)=$$
$$=\sin(2x+2\alpha)+\sin(2x+2\beta)-\left(\sin(2x+2\alpha)+\sin(2x+2\beta)\right)=0.$$

Aleshores, $f(x)$ és constant.

23.- Determineu totes les funcions tals que $\frac{1}{x}f(-x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x$, per a tot $x\neq 0$.

Solució:

Substituint en la igualtat $x=\frac{1}{t}$, $x\neq 0$:

$$t\cdot f\left(\frac{-1}{t}\right)+f(t)=\frac{1}{t} \qquad (1)$$

Substituint en la igualtat $x=-t$ $x\neq 0$:

$\frac{-1}{t}f(t)+f\left(\frac{-1}{t}\right)=-t$. Llevant denominadors:

$$-f(t)+t\cdot f\left(\frac{-1}{t}\right)=-t^2 \qquad (2)$$

Restant les expressions (1) i (2):

$$2f(t)=\frac{1}{t}+t^2=\frac{t^3+1}{t}.$$

$$f(t)=\frac{1}{t}+t^2=\frac{t^3+1}{2t}.$$

Aleshores, $f(x)=\frac{x^3+1}{2x}$, si $x\neq 0$.

Recíprocament:

Si $f(x)=\frac{x^3+1}{2x}$, si $x\neq 0$,

$$\frac{1}{x}f(-x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\frac{-x^3+1}{-2x}+\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3+1}{2\frac{1}{x}}=\frac{x^3-1}{2x^2}+\frac{\frac{x^3+1}{x^3}}{\frac{2}{x}}=\frac{x^3-1}{2x^2}+\frac{x^3+1}{2x^2}=\frac{2x^3}{2x^2}=x.$$

24.- Siga una funció $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que:

$f(1000) = 999$

$f(x)\cdot f(f(x)) = 1$, per a tot $x \in \mathbb{R}$.

Determineu $f(500)$

Olimpíada Polònia.

Solució:

$f(1000)\cdot f(f(1000)) = 1$.

$999 \cdot f(999) = 1$.

$f(999) = \frac{1}{999}$.

$f(x)$ és contínua aplicant el teorema de Darboux dels valors intermigs:

$\exists a \in [999,1000]$, tal que $f(a) = 500$.

$f(a)\cdot f(f(a)) = 1$.

$500 \cdot f(500) = 1$.

$f(500) = \frac{1}{500}$.

25.-

a) Si $x>1$ proveu que $\ln(x)>\frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$.

b) Si $a>b>0$, proveu que $\frac{a-b}{\ln(a)-\ln(b)}<\frac{1}{3}\left(2\sqrt{ab}+\frac{a+b}{2}\right)$.

Solució:

a)

Siga $f(x)=\ln(x)-\frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$. La funció és contínua i derivable si $x>1$.

$f'(x)=\frac{(x-1)^4}{x(x^2+4x+1)^2}$.

$f'(x)>0$ si $x>1$.

$f(1)=0$

Si $x>1$, $f(x)>f(1)=0$. Aleshores, $\ln(x)>\frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$.

b)

Substituïm $x=\sqrt{\frac{a}{b}}>1$ en la desigualtat a):

$$\ln\sqrt{\frac{a}{b}}>\frac{3\left(\frac{a}{b}-1\right)}{\frac{a}{b}+4\sqrt{\frac{a}{b}}+1}.$$

$$\frac{1}{2}(\ln a-\ln b)>\frac{\frac{3(a-b)}{b}}{\frac{a+4\sqrt{ab}+b}{b}}.$$

$$\frac{1}{2}(\ln a-\ln b)>\frac{3(a-b)}{4\sqrt{ab}+a+b}.$$

Com que $\ln a-\ln b>0$, $4\sqrt{ab}+a+b>0$:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{3}\left(4\sqrt{ab}+a+b\right)>\frac{a-b}{\ln a-\ln b}.$$

$$\frac{a-b}{\ln(a)-\ln(b)}<\frac{1}{3}\left(2\sqrt{ab}+\frac{a+b}{2}\right).$$

26.- Siga la successió definida per $u_1 = a$, $u_2 = b$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1})$, $n \geq 2$.

a) Proveu que existeix $\lim\limits_{x\to\infty} u_n$.

b) Calculeu el $\lim\limits_{x\to\infty} u_n$ en funció de a i b.

Solució:

La fórmula de recurrència s'obté amb l'equació associada $2\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$.

Les seues arrels són: $\lambda = \frac{-1}{2}, 1$. Aleshores,

$$u_n = X\left(\frac{-1}{2}\right)^n + Y(1)^n = X\left(\frac{-1}{2}\right)^n + Y,\quad u_1 = a,\ u_2 = b.$$

Si $n = 1$, $a = \frac{-1}{2}X + Y$.

Si $n = 2$, $b = \frac{1}{4}X + Y$.

Resolent el sistema format per les dues equacions:

$$\begin{cases} X = \frac{4}{3}(b-a) \\ Y = \frac{1}{3}(a+2b) \end{cases}.$$

Aleshores, $u_n = \frac{4}{3}(b-a)\left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}(a+2b)$.

$$\lim_{x\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}(b-a)\left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}(a+2b)\right) = \frac{1}{3}(a+2b).$$

27.- Siga $f: R \to R$ una funció derivable en R tal que $f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}f(x)$.

Proveu que $f(x)=f'(0)x$.

Demostració:
Fent $x=0$

$f(0)=\frac{1}{2}f(0)$, aleshores, $f(0)=0$.

Siga $x \in R$.

$$x \cdot f'(0) = x \cdot \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x \cdot \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} =$$

$$= x \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} = x \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}f(x)}{\frac{x}{2^n}} = x \cdot \frac{f(x)}{x} = f(x).$$

28.- Determineu les funcions $u(x)$ que satisfan $u(x) = x + \int_0^{\frac{1}{2}} u(t)dt$.

Solució:

$\int_0^{\frac{1}{2}} u(t)dt$ és constant, aleshores, $u(x) = x + c$, amb $c = \int_0^{\frac{1}{2}} u(t)dt$ constant.

$\int_0^{\frac{1}{2}} (t + c)dt = \left[\left(\frac{t^2}{2} + ct\right)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} + \frac{c}{2} = c$.

$\frac{1}{8} + \frac{c}{2} = c$. Resolent l'equació:

$c = \frac{1}{4}$, per tant, $u(x) = x + \frac{1}{4}$.

29.- Calculeu els termes generals de les següents successions recurrents:

a) $a_{n+2} = 5 \cdot a_{n+1} - 6 \cdot a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.

b) $b_{n+2} = 6 \cdot b_{n+1} - 9 \cdot b_n$, $b_1 = 2$, $b_2 = 3$.

Solució:

a)

L'equació característica de la successió és:

$q^2 = 5q - 6$, les solucions són: $q = 2$, $q = 3$

Aleshores el terme general de la successió $\{a_n\}$ és:

$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$.

Calculem A i B utilitzant el primer i segon termes de la successió:

$\begin{cases} 1 = A \cdot 2^1 + B \cdot 3^1 \\ 1 = A \cdot 2^2 + B \cdot 3^2 \end{cases}$, $\begin{cases} 2A + 3B = 1 \\ 4A + 9B = 1 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} A = 1 \\ B = \dfrac{-1}{3} \end{cases}$. Aleshores, el terme general de la successió és:

$a_n = 1 \cdot 2^n - \dfrac{1}{3} \cdot 3^n = 2^n - 3^{n-1}$.

b)

L'equació característica de la successió és:

$q^2 = 6q - 9$, les solucions són: $q = 3$, $q = 3$

Aleshores el terme general de la successió $\{b_n\}$ és:

$b_n = A \cdot 3^n + B \cdot n \cdot 3^n$.

Calculem A i B utilitzant el primer i segon termes de la successió:

$\begin{cases} 2 = A \cdot 3^1 + B \cdot 1 \cdot 3^1 \\ 3 = A \cdot 3^2 + B \cdot 2 \cdot 3^2 \end{cases}$, $\begin{cases} 3A + 3B = 2 \\ 9A + 18B = 3 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} A = 1 \\ B = \dfrac{-1}{3} \end{cases}$. Aleshores, el terme general de la successió és:

$b_n = 1 \cdot 3^n - \dfrac{1}{3} \cdot n \cdot 3^n = \left(1 - \dfrac{n}{3}\right) 3^n$.

30.- Calculeu el terme general de la següent successió recurrent:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2} + 1,\ a_1 = 1,\ \ a_2 = 1.$$

Solució:

$2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 2$

$2a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + 2$

Restant les expressions:

$2a_{n+3} - 2a_{n+2} = a_{n+2} - a_n$. Simplificant:

$2a_{n+3} - 3a_{n+2} + a_n = 0$.

L'equació característica és:

$2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$, les solucions de la qual són: $x = 1, 1, \frac{-1}{2}$.

Aleshores el terme general de la successió $\{a_n\}$ és:

$$a_n = A \cdot 1^n + B \cdot n \cdot 1^n + C\left(\frac{-1}{2}\right)^n.$$

Calculem a_3:

$$a_3 = \frac{a_2 + a_1}{2} + 1 = \frac{1+1}{2} + 1 = 2$$

Calculem A i B C utilitzant els primers 3 termes de la successió:

$$\begin{cases} 1 = A \cdot 1^1 + B \cdot 1 \cdot 1^1 + C\left(\frac{-1}{2}\right) \\ 1 = A \cdot 1^2 + B \cdot 2 \cdot 1^2 + C\left(\frac{-1}{2}\right)^2 \\ 2 = A \cdot 1^3 + B \cdot 3 \cdot 1^3 + C\left(\frac{-1}{2}\right)^3 \end{cases},\quad \begin{cases} 2A + 2B - C = 2 \\ 4A + 8B + C = 4 \\ 8A + 24B - C = 16 \end{cases}$$

. Resolent el sistema:

$$\begin{cases} A = \frac{-1}{9} \\ B = \frac{2}{3} \\ C = \frac{-8}{9} \end{cases}.$$

Aleshores, $a_n = \frac{-1}{9} + \frac{2}{3} \cdot n + \frac{-8}{9}\left(\frac{-1}{2}\right)^n = \frac{-1 + 6n + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-3}}{9}$.