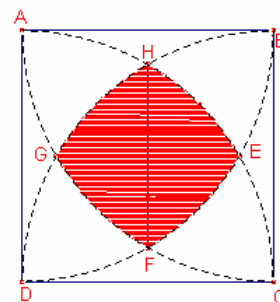


Problemes Anàlisi3



21.-

Els punts A, B, C, D són els vèrtexs d'un quadrat de costat $\overline{AB} = 1$. Amb centres els vèrtexs i radis iguals a 1 dibuixem 4 circumferències. La intersecció de les 4 circumferències determinen un quadrilàter curvilini EFGH. Determineu l'àrea del quadrilàter:

22.- Proveu que

$\sin^2(x + \alpha) + \sin^2(x + \beta) - 2\cos(\alpha - \beta)\sin(x + \alpha)\sin(x + \beta)$ és constant per a tot x .

23.- Determineu totes les funcions tals que $\frac{1}{x}f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$, per a tot $x \neq 0$.

24.- Siga una funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que:

$f(1000) = 999$. $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$, per a tot $x \in \mathbb{R}$.

Determineu $f(500)$. (Olimpíada Polònia).

25.-

a) Si $x > 1$ proveu que $\ln(x) > \frac{3(x^2 - 1)}{x^2 + 4x + 1}$.

b) Si $a > b > 0$, proveu que $\frac{a - b}{\ln(a) - \ln(b)} < \frac{1}{3} \left(2\sqrt{ab} + \frac{a + b}{2} \right)$.

26.- Siga la successió definida per $u_1 = a$, $u_2 = b$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1})$, $n \geq 2$.

a) Proveu que existeix $\lim_{x \rightarrow \infty} u_n$.

b) Calculeu el $\lim_{x \rightarrow \infty} u_n$ en funció de a i b.

27.- Siga $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció derivable en \mathbb{R} tal que $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x)$.

Proveu que $f(x) = f'(0)x$.

28.- Determineu les funcions $u(x)$ que satisfan $u(x) = x + \int_0^{\frac{1}{2}} u(t) dt$.

29.- Calculeu els termes generals de les següents successions recurrents:

a) $a_{n+2} = 5 \cdot a_{n+1} - 6 \cdot a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.

b) $b_{n+2} = 6 \cdot b_{n+1} - 9 \cdot b_n$, $b_1 = 2$, $b_2 = 3$.

30.- Calculeu el terme general de la següent successió recurrent:

$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2} + 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.