31.-

a) Determineu la funció $f(x)$ si $f(x+1)=x^2+2x+2$ per a tot $x\in R$.

b) Determineu la funció $g(x)$ si $g\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ per a tot $x\in R\sim\{0\}$.

c) Determineu la funció $h(x)$ si $h(x+2)+h(x+1)=2x+3$ per a tot $x\in R$.

Solució:

a)

Siga $x+1=a$:

$f(a)=f(a-1+1)=(a-1)^2+2(a-1)+2=a^2+1,$ per a tot $a\in R$.

b)

Siga $x+\dfrac{1}{x}=a$, $\quad x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$, $\quad x\neq 0$, per tant, $a\neq 0$

$$g(a)=g\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}+\frac{1}{\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}\right)=\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{a+\sqrt{a^2-4}}\right)^2=$$

$$=\frac{a^2+a^2-4+2a\sqrt{a^2-4}}{4}+\frac{4}{a^2+a^2-4+2a\sqrt{a^2-4}}=$$

$$=\frac{a^2-2+a\sqrt{a^2-4}}{2}+\frac{a^2-2-a\sqrt{a^2-4}}{2}=a^2-2,\quad a\neq 0.$$

Notem que per a $a=0$ no està definida la funció.

c)

Siga $\begin{cases}x+2=k\\ x+1=-k\end{cases}$, aleshores, $x=\dfrac{-3}{2}$.

$h(k)+h(-k)=2\left(\dfrac{-3}{2}\right)+3=0$. Aleshores, $h(-k)=-h(k)$, $\quad\forall\, k\in R \qquad$ (1)

Siga $\begin{cases}x+2=k+2\\ x+1=-k-1\end{cases}$, aleshores, $x=-1$

$h(k+2)+h(-k-1)=2(-1)+3=1$. Aplicant (1):

$h(k+2)-h(k+1)=1 \qquad$ (2)

$h(k+2)+h(k+1)=2k+3 \qquad$ (3)

Sumant les expressions (2) (3):

$2\cdot h(k+2)=2k+4$. Simplificant:

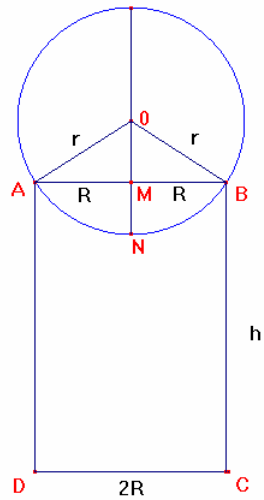
$h(k+2)=k+2$, $\forall\, k\in R$.

Siga $a=k+2$:

$h(a)=a$, per a tot $a\in R$.

32.- Un dipòsit cilíndric d'altura *h* i radi *R*, amb $R < h < 2R$ està ple d'aigua.
S'introdueix en el dipòsit una esfera de radi *r* més densa que l'aigua.
a) Obteniu la funció que expressa el volum d'aigua que es vessarà en funció de *r*.
b) Feu un dibuix (esborrany) de la funció on s'indique creixement, punts singulars, asímptotes,...
c) Estudieu la continuïtat de la funció.
d) Determineu, si existeix el valor de *r* per al qual siga més gran el volum d'aigua vessada.

$V_{\substack{\text{casquet}\\\text{esfèric}}} = \pi a^2\left(r - \frac{a}{3}\right)$ on a és l'altura del casquet i r el radi de l'esfera.



Solució: de Ricard/Óscar Ferreira:
Considerem la següent situació Geomètrica:
$\overline{OM} = \sqrt{r^2 - R^2}$. $\overline{MN} = r - \sqrt{r^2 - R^2}$

Volum del casquet en el cas $r > R \Rightarrow$
$V_{\substack{\text{casquet}\\\text{esfèric}}} = \pi\overline{MN}^2\left(r - \frac{\overline{MN}}{3}\right)$

La funció volum és:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 & \text{si } 0 \le r \le R \\ \frac{\pi}{3}\left(r - \sqrt{r^2 - R^2}\right)^2\left(2r + \sqrt{r^2 - R^2}\right) & \text{si } r > R \end{cases}$$

Continuïtat de la funció:

$$\lim_{r \to R^-} V(r) = \lim_{r \to R^-} \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

$$\lim_{r \to R^+} V(r) = \lim_{r \to R^-} \frac{\pi}{3}\left(r - \sqrt{r^2 - R^2}\right)^2\left(2r + \sqrt{r^2 - R^2}\right) = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

Per tant, al no coincidir els límits laterals, la funció no és contínua en $r = R$
$\text{Dom } V(r) = [0,R[\cup]R,+\infty[$
La funció presenta un salt de discontinuïtat finita de longitud:

$$\frac{4\pi R^3}{3} - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

Tall amb els eixos:
$V(0) = 0$, $(0,0)$ punt de tall amb l'eix d'ordenades.
$V(r) = 0$.

$\frac{4}{3}\pi r^3 = 0$, aleshores, $r = 0$,

$$\frac{\pi}{3}\left(r - \sqrt{r^2 - R^2}\right)^2\left(2r + \sqrt{r^2 - R^2}\right) \ne 0 \quad \text{si } r > R$$

$(0,0)$ és l'únic punt de tall amb l'eix d'abscisses

Derivabilitat:

Si $0<r<R$: $V'(r)=4\pi r^{2}$

Si $r>R$:

$$V^{/}(r)=\frac{p}{3}\left[2\left(r-\sqrt{r^2-R^2}\right)\left(1-\frac{\cancel{2}r}{\cancel{2}\sqrt{r^2-R^2}}\right)\left(2r+\sqrt{r^2-R^2}\right)+\left(r-\sqrt{r^2-R^2}\right)^2\left(2+\frac{\cancel{2}r}{\cancel{2}\sqrt{r^2-R^2}}\right)\right]$$

$$V^{/}(r)=\frac{p}{3}\left(r-\sqrt{r^2-R^2}\right)\left[2\left(1-\frac{r}{\sqrt{r^2-R^2}}\right)\left(2r+\sqrt{r^2-R^2}\right)+\left(r-\sqrt{r^2-R^2}\right)\left(2+\frac{r}{\sqrt{r^2-R^2}}\right)\right]$$

$$V^{/}(r)=\frac{p}{3}\left(r-\sqrt{r^2-R^2}\right)\left[2\left(\frac{\sqrt{r^2-R^2}-r}{\sqrt{r^2-R^2}}\right)\left(2r+\sqrt{r^2-R^2}\right)+\left(r-\sqrt{r^2-R^2}\right)\left(\frac{2\sqrt{r^2-R^2}+r}{\sqrt{r^2-R^2}}\right)\right]$$

$$V^{/}(r)=\frac{p}{3}\frac{\left(r-\sqrt{r^2-R^2}\right)^2}{\sqrt{r^2-R^2}}\left(\cancel{2\sqrt{r^2-R^2}}+r-\cancel{2\sqrt{r^2-R^2}}-4r\right)=-p\,\frac{r\left(r-\sqrt{r^2-R^2}\right)^2}{\sqrt{r^2-R^2}}$$

Monotonia. Extrems locals:

Si $0<r<R$:

$V'(r)=4\pi r^{2}>0$, la funció és estrictament creixent.

Si $r>R$:

$V'(r)=-\pi\frac{r\left(r-\sqrt{r^2-R^2}\right)^2}{\sqrt{r^2-R^2}}<0$, la funció és estrictament decreixent.

La funció no té extrems relatius.

El volum serà màxim quan $r=R$. I té per valor:

$V(R)=\frac{4\pi R^3}{3}$.

Concavitat i convexitat:

Si $0<r<R$: $V''(r)=8r>0$, aleshores la funció és còncava.

Si $r>R$

$$V^{/}(r)=-p\,\frac{r\left(r-\sqrt{r^2-R^2}\right)^2}{\sqrt{r^2-R^2}}\xrightarrow[Derive]{}V^{//}(r)=p\,\frac{\left(r-\sqrt{r^2-R^2}\right)^2\left(2r\sqrt{r^2-R^2}+R^2\right)}{\left(r^2-R^2\right)\sqrt{r^2-R^2}}$$

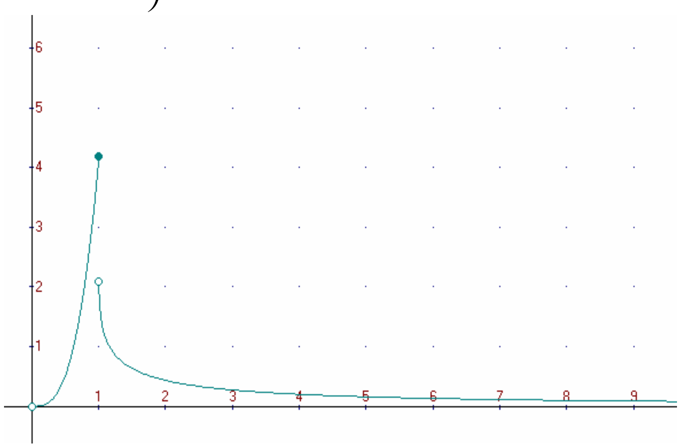
$V''(r)>0$, aleshores la funció és còncava.

La funció no té punts de inflexió.

Asímptotes:

$$\lim_{r\to+\infty}V(r)=\lim_{r\to+\infty}\frac{4}{3}\left(r-\sqrt{r^2-R^2}\right)^2\left(2r+\sqrt{r^2-R^2}=\frac{4\pi R^3}{3}\right)=0$$

$y=0$ és una asímptota horitzontal.



33.- Siguen $f : R \to R$ una funció contínua i k un nombre real tals que:

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{x}{2}\left(f(x)+k\right), \quad \forall x \in R .$$

a) Proveu que $f(0) = k$

b) Proveu que les úniques funcions contínues que satisfan la relació de l'enunciat són les funcions del tipus $f(x) = cx + k$.

Solució:

$$f(x) = \frac{2 \cdot \int_0^x f(t)dt}{x} - k .$$

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2 \cdot \int_0^x f(t)dt}{x} - k \right)$$

Aplicant la regla de l'Hôpital:

$$f(0) = 2f(0) - k$$

Aleshores, $f(0) = k$.

$f(x)$ és derivable en $R \sim \{0\}$

Aplicant el teorema fonamental del càlcul integral:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x)+k\right) + \frac{x}{2}f'(x), \quad \forall x \in R \sim \{0\}.$$

$$f(x) = x \cdot f'(x) + k .$$

$$y' = \frac{y-k}{x}$$

Les variables són separables:

$$\frac{1}{y-k}dy = \frac{1}{x}dx .$$

$$\int \frac{1}{y-k}dy - \int \frac{1}{x}dx = \ln C .$$

$$\ln|y-k| - \ln|x| = \ln C .$$

$$\ln\left|\frac{y-k}{x}\right| = \ln C .$$

$$\left|\frac{y-k}{x}\right| = C$$

Aleshores, $f(x) = C|x| + k$.

34.- Determineu les funcions $f(x)$ tal que $[f(x)]^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x$ per a tot x distints de $-1, 0, 1$.

Solució:

Siga $k = \frac{1-x}{1+x}$, substituint en l'equació:

$$[f(k)]^2 \cdot f\left(\frac{1-k}{1+k}\right) = 64k$$

$$\left[f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]^2 \cdot f(x) = 64\frac{1-x}{1+x} \qquad (1)$$

Per hipòtesi:

$$[f(x)]^4 \cdot \left[f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]^2 = (64x)^2 \qquad (2)$$

Dividint les expressions (2) entre (1):

$[f(x)]^3 = \dfrac{(64x)^2}{64\frac{1-x}{1+x}}$, simplificant:

$[f(x)]^3 = \dfrac{64x^2(1+x)}{1-x}$, aleshores:

$$f(x) = 4 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2(1+x)}{1-x}}.$$

35.- Calculeu el següent límit raonadament:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2x}\frac{\sin t}{t}dt}{x^3}.$$ (Oposicions de Galícia 2005).

Solució: (Óscar Ferreira).
Considerem les funcions:

$$f(x)=x-\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2x}\frac{\sin t}{t}dt, \quad g(x)=x^3.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2x}\frac{\sin t}{t}dt}{x^3}=\frac{0}{0}.$$

Podem aplicar la regla de l'Hôpital ja que $f(x), g(x)$ són contínues en $x=0$ i derivables en un entorn reduït de $x=0$. Notem que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1$, per tant $f(x)$ és derivable en un entorn reduït de $x=0$.

Aleshores,

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin(2x)}{2x}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin(2x)}{6x^3}=\frac{0}{0}$$, tornant a aplicar la regla de l'Hôpital:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos(2x)}{18x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{9x^2}=\frac{0}{0}$$, tornant a aplicar la regla de l'Hôpital:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(2x)}{18x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{9}\frac{\sin(2x)}{2x}=\frac{2}{9}\cdot 1=\frac{2}{9}.$$

36.- Calculeu el següent límit: $L = \lim_{x\to 1}\left(\frac{e^x - e}{\ln x}\right)^{g(x)}$, on $g(x) = \frac{1}{e^x - 1}$

Solució:

$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{e-1}$

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{e^x - e}{\ln x}\right) = \frac{0}{0}$.

Aplicant la regle de l'Hôpital:

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{e^x - e}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{e^x}{\frac{1}{x}} = e$.

Aleshores,

$L = \lim_{x\to 1}\left(\frac{e^x - e}{\ln x}\right)^{g(x)} = e^{\frac{1}{e-1}}$.

37.- Siga la successió recurrent $a_{n+4}+a_{n+3}+a_{n+2}+a_{n+1}+a_n=12n$,
$a_1=a_2=a_3=a_4=0$.
a) Determineu el terme general. b) Calculeu a_{90}.

Solució:
Substituint $n=5$:
$a_5+0+0+0+0=12\cdot 1$, $a_5=12$.
$a_{n+4}+a_{n+3}+a_{n+2}+a_{n+1}+a_n=12n$. Substituint n per $n+1$:
$a_{n+5}+a_{n+4}+a_{n+3}+a_{n+2}+a_{n+1}=12(n+1)$.
Restant les dues expressions:
$a_{n+5}-a_n=12$. Substituint n per $n+1$:
$a_{n+6}-a_{n+1}=12$.
$a_{n+6}-a_{n+5}-a_{n+1}+a_n=0$. L'equació característica és:
$x^6-x^5-x+1=0$. Resolent l'equació per la regla de Ruffini:
$x=1$, $\sqrt[5]{1}=1, 1_{72^o}, 1_{144^o}, 1_{216^o}, 1_{288^o}$. $1_{72^o}, 1_{288^o}$ són conjugats, $1_{144^o}, 1_{216^o}$ són conjugats.
El terme general de la successió és:
$a_n=A(1)^n+Bn(1)^n+C\cdot 1^n\cos(72^o n)+D\cdot 1^n\sin(72^o n)+E\cdot 1^n\cos(144^o n)+F\cdot 1^n\cdot\sin(144^o n)$
Simplificant:
$a_n=A+Bn+C\cos(72^o n)+D\sin(72^o n)+E\cos(144^o n)+F\sin(144^o n)$
Determinem A, B, C, D, E amb els 6 primer termes:
$a_1=0$, $A+B+C\cdot\cos 72^o+D\cdot\sin 72^o+E\cdot\cos 144^o+F\cdot\sin 144^o=0$
$a_2=0$, $A+2B+C\cdot\cos(2\cdot 72^o)+D\cdot\sin(2\cdot 72^o)+E\cdot\cos(2\cdot 144^o)+F\cdot\sin(2\cdot 144^o)=0$
$a_3=0$, $A+3B+C\cdot\cos(3\cdot 72^o)+D\cdot\sin(3\cdot 72^o)+E\cdot\cos(3\cdot 144^o)+F\cdot\sin(3\cdot 144^o)=0$
$a_4=0$, $A+4B+C\cdot\cos(4\cdot 72^o)+D\cdot\sin(4\cdot 72^o)+E\cdot\cos(4\cdot 144^o)+F\cdot\sin(4\cdot 144^o)=0$
$a_5=12$, $A+5B+C\cdot\cos(0^o)+D\cdot\sin(0^o)+E\cdot\cos(0^o)+F\cdot\sin(0^o)=12$
$a_6=12$, $A+6B+C\cdot\cos 72^o+D\cdot\sin 72^o+E\cdot\cos 144^o+F\cdot\sin 144^o=12$
Considerem el sistema format per les 6 equacions la solució del qual és:

$$\begin{cases} A=-\dfrac{24}{5} \\ B=\dfrac{12}{5} \\ C=\dfrac{12}{5} \\ D=\sqrt{\dfrac{144}{25}+\dfrac{288\sqrt{5}}{125}} \\ E=\dfrac{12}{5} \\ F=\sqrt{\dfrac{144}{25}-\dfrac{288\sqrt{5}}{125}} \end{cases}$$

. El terme general de la successió és:

$$a_n=-\frac{24}{5}+\frac{12}{5}n+\frac{12}{5}\cos(72^o\cdot n)+\sqrt{\frac{144}{25}+\frac{288\sqrt{5}}{125}}\sin(72^o\cdot n)+\frac{12}{5}\cos(144^o\cdot n)+$$
$$+\sqrt{\frac{144}{25}+\frac{288\sqrt{5}}{125}}\sin(144^o\cdot n).$$

$a_{90}=216$.

38.- Siga la funció $f(x)$ amb derivada contínua en l'interval $I=[a,b]$.
Siga $f(a)=0$ i $0 \le f'(x) \le 1$, per a tot $x \in I$. Demostreu que:

a) $[f(x)]^2 \le 2\int_a^b f(x)dx$, per a tot $x \in I$.

b) $\int_a^b [f(x)]^3 dx \le \left[\int_a^b f(x)dx\right]^2$.

Solució:
a)
$\int_a^x f(t)f'(t)dt = \frac{1}{2}[f(x)]^2$. Aleshores:

$[f(x)]^2 = 2\int_a^x f(t)f'(t)dt$ per a tot $x \in I$.

Com que $f'(x) \le 1$ $f(t)f'(t) \le f(t)$ per a tot $x \in I$.

Aleshores, $\int_a^x f(t)f'(t)dt \le \int_a^x f(t)dt$, per tant,

$[f(x)]^2 \le 2\int_a^x f(t)dt$.

Per ser $f'(x) \ge 0$, $f(a)=0$, la funció és monòtona creixent per a tot $x \in I$.
Aleshores,
$\int_a^x f(t) \le \int_a^b f(t)dt$.

Per tant, $[f(x)]^2 \le 2\int_a^b f(x)dx$.

b)
Siga $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, per l'apartat a) $[f(x)]^2 \le 2F(x)$, aleshores:

$$\int_a^b [f(x)]^3 dx = \int_a^b [f(x)]^2 f(x) \le \int_a^b 2F(t)F'(t) = [F(b)]^2 - [F(a)]^2 = \left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 - 0 = \left[\int_a^b f(x)dx\right]^2$$

39.- Determineu la funció derivable $f(x)$ derivable en $[0,2]$ que verifique l'equació:
$3\int_0^x f(t)dt = [f(x)+2f(0)]x$ i tal que $f(1)=1$, $f(2)=7$.

Solució:
Si la funció $f(x)$ és derivable en $[0,2]$ és contínua. Derivant l'expressió:
$3f(x) = f(x)+2f(0)+f'(x)x$, aleshores,
$x\cdot f'(x) - 2f(x) + 2f(0) = 0$.

Siga $g(x) = f(x) - f(0)$, $g'(x) = f'(x)$, la igualtat anterior es pot escriure:
$x\cdot g'(x) - 2g(x) = 0$, o bé:
$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2}{x}$$

$$\left(\ln|g(x)|\right)' = \frac{g'(x)}{g(x)}, \quad \left(\ln x^2\right)' = \frac{2}{x}.$$
Aleshores, aplicant el teorema fonamental del càlcul integral:
$\ln|g(x)| = \ln(x^2) + \ln(K) = \ln(Kx^2)$, $K > 0$.

Aleshores, $|g(x)| = Kx^2$, o bé:
$|f(x) - f(0)| = Kx^2$.
Si $x = 1$, $f(1) = 1$, $|1 - f(0)| = K$.
Si $x = 2$, $f(2) = 7$, $|7 - f(0)| = 4K$.
Aleshores, $\begin{cases} K = 2 \\ f(0) = -1 \end{cases}$.

$f(x) = 2x^2 - 1$.

40.- Determineu els valors màxim i mínim de la funció $f(x) = 3\sin 5x + 7\cos 5x$.

Solució:

$$f(x) = \sqrt{3^2 + 7^2}\left(\frac{3}{\sqrt{3^2 + 7^2}}\sin 5x + \frac{7}{\sqrt{3^2 + 7^2}}\cos 5x\right).$$

$$f(x) = \sqrt{58}\left(\frac{3}{\sqrt{58}}\sin 5x + \frac{7}{\sqrt{58}}\cos 5x\right).$$

Siga $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{58}}$, $\sin\alpha = \dfrac{7}{\sqrt{58}}$. Aleshores,

$$f(x) = \sqrt{58}(\sin 5x \cdot \cos\alpha + \cos 5x \cdot \sin\alpha)$$

$$f(x) = \sqrt{58}\sin(5x + \alpha)$$

Els màxims de la funció s'assoleixen en : $5x + \alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\forall k \in Z$.

És a dir, $x = \dfrac{\pi - 2\alpha}{10} + \dfrac{2\pi}{5}k$, $\alpha = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{58}}$, $\forall k \in Z$.

Els valors màxims són: $f\left(\dfrac{\pi - 2\alpha}{10} + \dfrac{2\pi}{5}k\right) = \sqrt{58} \cdot 1 = \sqrt{58}$.

Els mínims de la funció s'assoleixen en : $5x + \alpha = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\forall k \in Z$.

És a dir, $x = \dfrac{-\pi - 2\alpha}{10} + \dfrac{2\pi}{5}k$, $\alpha = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{58}}$, $\forall k \in Z$.

Els valors mínims són: $f\left(\dfrac{-\pi - 2\alpha}{10} + \dfrac{2\pi}{5}k\right) = \sqrt{58} \cdot (-1) = -\sqrt{58}$.