

41.- Demostreu que per a tot $x \geq 0$ s'acompleix la desigualtat $x^2 - x^3 < \frac{1}{6}$.

Solució:

Considerem la funció $f(x) = x^2 - x^3$, $x \geq 0$.

Calculem el màxim de la funció $f(x)$.

$f(x)$ és contínua i dues vegades derivable en $x \geq 0$

$$f'(x) = 2x - 3x^2$$

$f'(x) > 0$ quan $x \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$. Aleshores, $f(x)$ és creixent en $x \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.

$f'(x) < 0$ quan $x \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$. Aleshores, $f(x)$ és decreixent en $x \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$.

$f'(x) = 0$ quan $x = \frac{2}{3}$, és contínua en $x = \frac{2}{3}$ i passa de ser creixent a decreixent,

aleshores, $x = \frac{2}{3}$ és un màxim de la relatiu.

$x = \frac{2}{3}$ és el màxim absolut de $f(x)$ quan $x \geq 0$.

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27} < \frac{1}{6}.$$

Aleshores, $x^2 - x^3 < \frac{1}{6}$ quan $x \geq 0$.

42.- Siga la successió $\{a_n\}$ definida per $12a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

a) Determineu el terme general.

b) Calculeu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

c) Calculeu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Solució:

a)

L'equació característica de la successió recurrent $\{a_n\}$ és:

$$12x^2 = x + 1, \text{ les solucions de l'equació són: } x = \frac{1}{3}, x = \frac{-1}{4}.$$

La base de la successió recurrent és: $\left\{ \left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\}, \left\{ \left(\frac{-1}{4} \right)^n \right\} \right\}$.

$$\text{Aleshores, } a_n = A \left(\frac{1}{3} \right)^n + B \left(\frac{-1}{4} \right)^n$$

$$\text{Si } a_1 = 1, \quad 1 = \frac{A}{3} - \frac{B}{4}$$

$$\text{Si } a_2 = 2, \quad 2 = \frac{A}{9} + \frac{B}{16}$$

Resolent el sistema format per les dues expressions:

$$\begin{cases} A = \frac{81}{7} \\ B = \frac{80}{7} \end{cases}$$

$$\text{Aleshores, } a_n = \frac{81}{7} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{80}{7} \left(\frac{-1}{4} \right)^n.$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{81}{7} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{80}{7} \left(\frac{-1}{4} \right)^n \right) = 0.$$

c)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{81}{7} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{80}{7} \left(\frac{-1}{4} \right)^n \right) = \frac{81}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{80}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{4} \right)^n = \\ &= \frac{81}{7} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{80}{7} \frac{-1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

43.- Siguen a i b nombres reals $a < b$ i $f(x)$ una funció real contínua en $[a, b]$ i derivable en $]a, b[$ que compleix $f(a) = f(b)$.

Proveu que per a cada nombre natural $n \geq 1$ existeixen nombres reals distints

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tals que:

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + \dots + f'(\xi_n) = 0.$$

(Oposicions Balears 2005).

Solució Nacho Sánchez:

Per a $n = 1$

La funció $f(x)$ compleix les hipòtesis del teorema de Rolle, aleshores:

$$\exists \xi_1 \in]a, b[\text{ tal que } f'(\xi_1) = 0.$$

Siga $n > 1$

Dividim l'interval $[a, b]$ en n intervals iguals:

$$x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + \frac{b-a}{n} \cdot 2, \dots, x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i, \dots, x_n = b.$$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n].$$

$$\text{Notem que } x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

La funció $f(x)$ és contínua en $[x_{i-1}, x_i]$, i derivable en $]x_{i-1}, x_i[$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Aplicant el teorema de Lagrange (increments finits):

$$\exists \xi_i \in]x_{i-1}, x_i[\text{ tal que } \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\frac{b-a}{n}} = f'(\xi_i).$$

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} f'(\xi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$f(x_1) - f(a) = \frac{b-a}{n} f'(\xi_1)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{b-a}{n} f'(\xi_2)$$

.....

$$f(b) - f(x_{n-1}) = \frac{b-a}{n} f'(\xi_n)$$

Sumant les expressions anteriors:

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{n} (f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + \dots + f'(\xi_n))$$

Per hipòtesi $f(a) = f(b)$

Aleshores: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + \dots + f'(\xi_n) = 0$ a més a més $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ són distints ja que estan en distints intervals.

44.-

a) Proveu que $2 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}$.

b) Proveu que $2 \operatorname{arctg}(x) + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \pi$, $x \geq 1$.

Solució 1:

Siga $f(x) = 2 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \arcsin(2x-1)$, $0 < x \leq 1$.

$f(x)$ és contínua i derivable en $x \in]0,1[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \frac{1}{1 + \frac{1-x}{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \cdot \frac{-x - (1-x)}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \cdot 2 = \\ &= 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{4(x-x^2)}} \cdot 2 = \frac{-1}{\sqrt{x(1-x)}} + \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = 0. \end{aligned}$$

Aleshores, aplicant el teorema fonamental del càlcul integral:

$$f(x) = k, \quad \forall x \in]0,1[.$$

$$f(1) = 2 \cdot \operatorname{arctg}(0) + \arcsin(1) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Aleshores, $2 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}$

Solució 2:

Siga $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$, aleshores, $\cos \alpha = \sqrt{x}$, $\sin \alpha = \sqrt{1-x}$.

Siga $\beta = \arcsin(2x-1)$, $\sin \beta = 2x-1$, aleshores, $\cos \beta = 2\sqrt{x(1-x)}$.

Hem de provar que $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha + \beta) &= \sin 2\alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos 2\alpha = \\ &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos^2 \alpha - \sin \beta \cdot \sin^2 \alpha = \\ &= 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x(1-x)} + (2x-1)x - (2x-1)(1-x) = \\ &= 4x(1-x) + (2x-1)x - (2x-1)(1-x) = \\ &= 4x - 4x^2 + (2x-1)(2x-1) = 1. \end{aligned}$$

Aleshores, $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

45.-

a) Proveu que $\frac{-1}{2} \leq \cos x \cdot \sin x \leq \frac{1}{2}$.

b) Proveu que $(2 + \sin x)^2(x + \sin x \cdot \cos x) - x + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solució:

a)

Considerem la funció $f(x) = \cos x \cdot \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La funció és contínua i derivable en $x \in \mathbb{R}$. $-1 \leq \sin(2x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dividint la inequació per 2:

$$\frac{-1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin(2x) \leq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aleshores, $\frac{-1}{2} \leq \cos x \cdot \sin x \leq \frac{1}{2}$.

b)

Provem que $(2 + \sin x)^2(x + \sin x \cdot \cos x) > x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\sin x \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Per l'apartat anterior: $\cos x \cdot \sin x \geq \frac{-1}{2} > -1$.

$$(2 + \sin x)^2(x + \sin x \cdot \cos x) > (2 - 1)^2(x - 1) > x - 1.$$

46.- Determineu l'angle entre les gràfiques de les funcions $f(x) = \sqrt{2x}$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$ en el punt de la intersecció d'ambdues gràfiques d'abscissa positiva.

Solució:

L'angle de dos corbes en un punt és l'angle que formen les rectes tangents a ambdues corbes en el punt.

Calculem el punt d'intersecció de les corbes resolent el sistema format per les dues corbes:

$$\begin{cases} y = \sqrt{2x} \\ y = \frac{x^2}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ 2x = \frac{x^4}{4} \end{cases}. \text{ Les solucions dels qual són: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Notem que el domini de $f(x) = \sqrt{2x}$ és $[0, +\infty[$.

La solució d'abscissa positiva és $(2, 2)$.

El pendent de la recta tangent és la derivada en els punt. Calculem la derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x}}, \quad f'(2) = \frac{1}{2}.$$

$$g'(x) = x, \quad g'(2) = 2.$$

Les equacions de les rectes tangents són:

$$r_f \equiv y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2), \quad r_g \equiv y - 2 = 2(x - 2).$$

Calculem l'angle de les dues rectes:

El vector director de r_f és $v = (2, 1)$

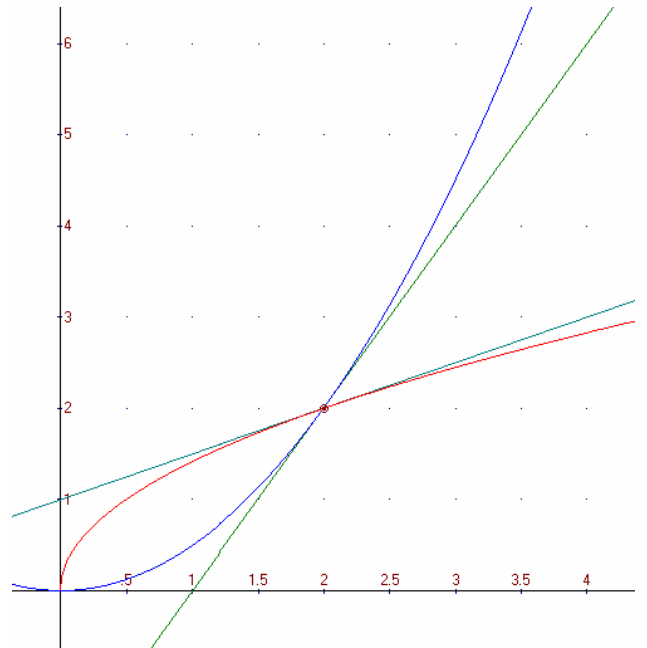
El vector director de r_g és $w = (1, 2)$

Calculem l'angle de les rectes utilitzant el producte escalar dels vectors directores:

$$v \cdot w = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \alpha.$$

$$4 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}, \text{ aleshores,}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \approx 36^\circ 52' 12''.$$



També hauríem pogut utilitzar la fórmula de les tangents:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + m \cdot m'} \right| \text{ on } m, m' \text{ són els pendents de rectes tangents:}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{\frac{1}{2} - 2}{1 + \frac{1}{2} \cdot 2} \right| = \frac{3}{4}, \text{ aleshores, } \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 36^\circ 52' 12''$$

47.- Determineu el lloc geomètric dels vèrtexs dels angles rectes, els costats dels quals són tangents a la funció $y = \frac{1}{4}x^2$.

Solució:

Siguen $P\left(x_1, \frac{1}{4}x_1^2\right)$, $Q\left(x_2, \frac{1}{4}x_2^2\right)$ dos punts de la paràbola $y = \frac{1}{4}x^2$, tal que les rectes tangents a la paràbola formen un angle de 90° .

Determinem les equacions de les rectes tangents a la paràbola en els punts P i Q: El pendent de la recta tangent és la derivada en els punt. Calculem la derivada:

$$y' = \frac{1}{2}x, \quad y'(x_1) = \frac{1}{2}x_1, \quad y'(x_2) = \frac{1}{2}x_2.$$

Les rectes tangents a la paràbola en els punts P i Q són:

$$r_P \equiv y - \frac{1}{4}x_1^2 = \frac{1}{2}x_1(x - x_1), \quad r_Q \equiv y - \frac{1}{4}x_2^2 = \frac{1}{2}x_2(x - x_2)$$

Les rectes r_P , r_Q són perpendiculars, aleshores el producte dels seus pendents és -1 , per tant:

$$\frac{1}{2}x_1 \cdot \frac{1}{2}x_2 = -1, \quad x_1 \cdot x_2 = -4.$$

Siga $A(a,b)$ la intersecció de les rectes r_P , r_Q .

Calculem la intersecció de les rectes r_P , r_Q , resolent el sistema format per les seues equacions:

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2}x_1a - \frac{1}{4}x_1^2 \\ b = \frac{1}{2}x_2a - \frac{1}{4}x_2^2 \end{cases}.$$

Restant ambdues equacions:

$$0 = \frac{a}{2}(x_1 - x_2) - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)(x_1 + x_2).$$

Aleshores, $2a = x_1 + x_2$

Sumant les dues equacions:

$$2b = \frac{a}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$2b = \frac{a}{2}2a - \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2)$$

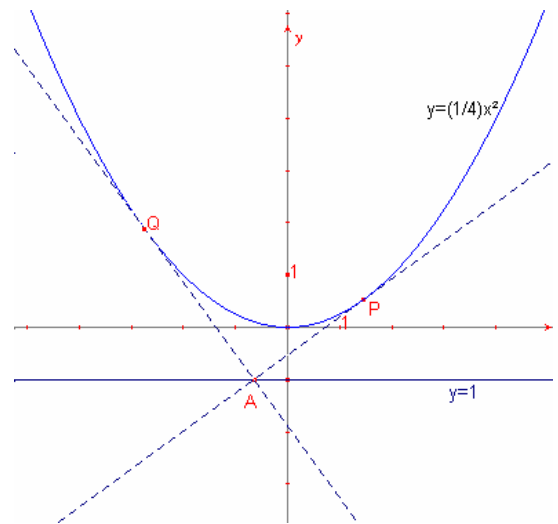
$$2b = a^2 - \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}x_1x_2$$

$$2b = a^2 - \frac{1}{4}(2a)^2 + \frac{1}{2}(-4)$$

$$b = -1$$

Aleshores, el lloc geomètric és la recta $y = -1$.

Notem que el lloc geomètric és la directriu de la paràbola.



48.- Factoritzeu l'expressió: $xy(x - y) + yz(y - z) + xz(z - x)$.

Solució:

Considerem la funció $f(x) = xy(x - y) + yz(y - z) + xz(z - x)$.

$$f'(x) = 2xy - y^2 + z^2 - 2xz = (y - z)(2x - y - z).$$

Notem que $(x^2 - (y + z)x)' = 2x - y - z$

$$((y - z)(x^2 - (y + z)x))' = (y - z)(2x - y - z).$$

Aplicant el teorema fonamental del càlcul integral:

$$f(x) = (y - z)(x^2 - (y + z)x) + C \text{ on } C \text{ no depèn de } x.$$

$$f(0) = C$$

$$f(0) = yz(y - z)$$

Aleshores, $C = yz(y - z)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (y - z)(x^2 - (y + z)x) + yz(y - z) = (y - z)(x^2 - (y + z)x + yz) = \\ &= (y - z)(x(x - y) - z(x - y)) = (y - z)(x - z)(x - y). \end{aligned}$$

Aleshores, $xy(x - y) + yz(y - z) + xz(z - x) = (x - y)(x - z)(y - z)$.

49.- Demostreu que $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$ quan $x \geq 0$.

Solució:

Considerem la funció $f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x}$, $x \geq 0$.

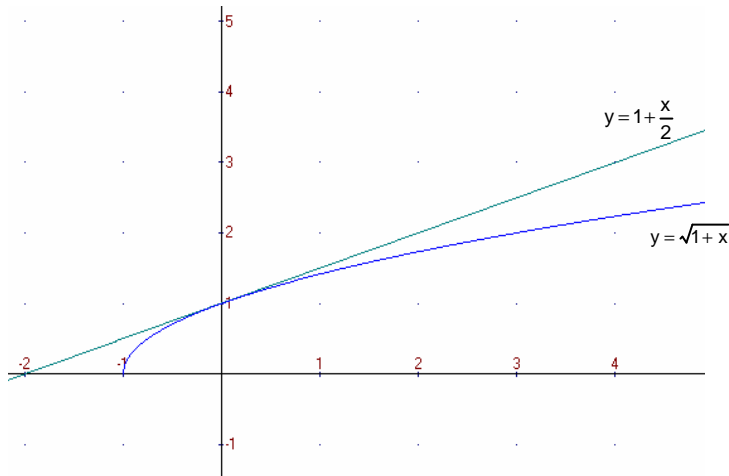
Demostrem que la funció és creixent quan $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{2\sqrt{1+x}} > 0$$

Notem que si $x \geq 0$, $\sqrt{1+x} > 1$.

La igualtat és dóna únicament quan $x = 0$

Vegem el resultat gràfic del problema:



50.- Siguen els nombres reals positius a, b, c, d . Demostreu que:

$$\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^{a+b} \leq \left(\frac{a}{c}\right)^a \left(\frac{b}{d}\right)^b.$$

Solució:

Considerem la funció $f(t) = (1+t)^a \left(1+\frac{1}{t}\right)^b$ $t > 0$.

$$f(t) = \frac{(1+t)^{a+b}}{t^b}.$$

Derivem la funció $f(t)$

$$f'(t) = \frac{(a+b)(1+t)^{a+b-1}t^b - bt^{b-1}(1+t)^{a+b}}{t^{2b}} = \frac{(1+t)^{a+b-1}a\left(t - \frac{b}{a}\right)}{t^{b+1}}.$$

$$f'(t) > 0 \quad \text{quan } t > \frac{b}{a}.$$

$$f'(t) = 0 \quad \text{quan } t = \frac{b}{a}.$$

$$f'(t) < 0 \quad \text{quan } t < \frac{b}{a}.$$

Aleshores, la funció $f(t)$ té un mínim en $t = \frac{b}{a}$.

$$f\left(\frac{b}{a}\right) \leq f(t) \quad \forall t > 0. \quad \text{La igualtat s'assoleix quan } t = \frac{b}{a}.$$

Siga $t = \frac{d}{c}$.

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^a \left(1 + \frac{a}{b}\right)^b \leq \left(1 + \frac{d}{c}\right)^a \left(1 + \frac{c}{d}\right)^b$$

Per ser tots els factors positius:

$$\left(\frac{1 + \frac{b}{a}}{1 + \frac{d}{c}}\right)^a \leq \left(\frac{1 + \frac{c}{d}}{1 + \frac{a}{b}}\right)^b.$$

$$\left(\frac{c(a+b)}{a(c+d)}\right)^a \leq \left(\frac{(c+d)b}{(a+b)d}\right)^b.$$

$$\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^{a+b} \leq \left(\frac{a}{c}\right)^a \left(\frac{b}{d}\right)^b.$$

La igualtat s'assoleix quan $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.