

51.- Donada la corba d'equació $y^2 = x^2 - x^4$, es demana:

- a) Dibuixeu-la.
 b) Calculeu l'àrea limitada per la corba:
 Oposicions Catalunya 2000.

Solució:

Siga $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$.

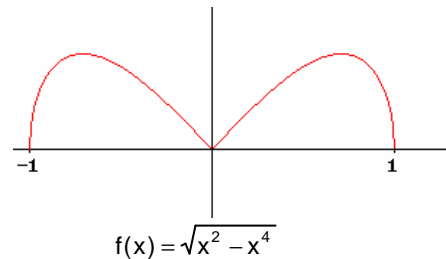
La funció és definida positiva i simètrica respecte l'eix d'ordenades.

El domini de la funció és $[-1, 1]$

La funció és contínua en $[-1, 1]$

La funció és derivable en $[-1, 1] \sim \{0\}$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



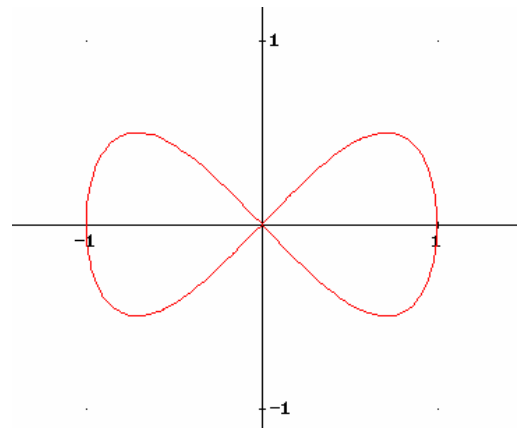
La funció és creixent en $\left] -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right[\cup \left] 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$.

La funció és decreixent en $\left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right[\cup \left] \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right[$.

La funció té un màxim en $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Els mínims de la funció són: $x = -1, 0, 1$.

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-x(2x^2 - 3)}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x(2x^2 - 3)}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



La funció és convexa en $]-1, 0[\cup]0, 1[$

La corba de la funció ve donada per les funcions:
 $y = f(x), y = -f(x)$, aquesta darrera simètrica de la primera respecte de l'eix d'abscisses.

b)

L'àrea de la corba, per la simetria és:

$$4 \int_0^1 \sqrt{x^2 - x^4} dx = 4 \int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} dx = 4 \left(\frac{-1}{2} \right) \int_0^1 -2x \sqrt{1 - x^2} dx = -2 \left(\frac{2\sqrt{(1 - x^2)^3}}{3} \right) \Big|_0^1 = -2 \left(\frac{-2}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

Aquesta corba és la lemniscata de Geromo.

52.- Determineu $a > 0$ de forma que el recinte limitat per la corba $y = \cos x$ amb $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ i els eixos coordenades quede dividit en dues parts de la mateixa àrea per la corba $y = a \cdot \sin x$.
Oposicions Catalunya 1999.

Solució:

L'àrea del recinte limitat per la corba $y = \cos x$ amb $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ i

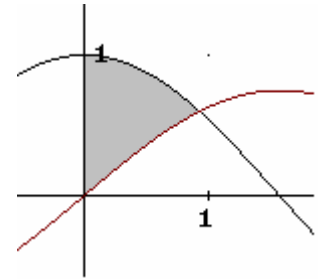
els eixos coordenades és:

$$S = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1$$

Calculem la intersecció de les corbes $y = \cos x$, $y = a \cdot \sin x$ en $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\cos x = a \cdot \sin x$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}, \quad x = \operatorname{arctg} \frac{1}{a} = \operatorname{arccos} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$



A fi que l'àrea quede dividida en dues parts iguals per les dues corbes ha de passar que:

$$\int_0^{\operatorname{arctg} \frac{1}{a}} (\cos x - a \cdot \sin x) \, dx = \frac{1}{2}.$$

$$(\sin x + a \cdot \cos x) \Big|_0^{\operatorname{arctg} \frac{1}{a}} = 1$$

$$\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{a}\right) + a \cdot \cos\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{a}\right) - (0 + a) = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\operatorname{arcsin} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right) + a \cdot \cos\left(\operatorname{arccos} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right) - a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1+a^2}{\sqrt{1+a^2}} - a = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1+a^2} = a + \frac{1}{2}$$

Resolent l'equació, $a = \frac{3}{4}$.

53.- Considerem la funció $f(x) = |x+1| + |x-2|$.

a) Representeu-la gràficament.

b) Calculeu $\int_1^3 f(x)dx$.

Oposicions Catalunya 1993.

Solució:

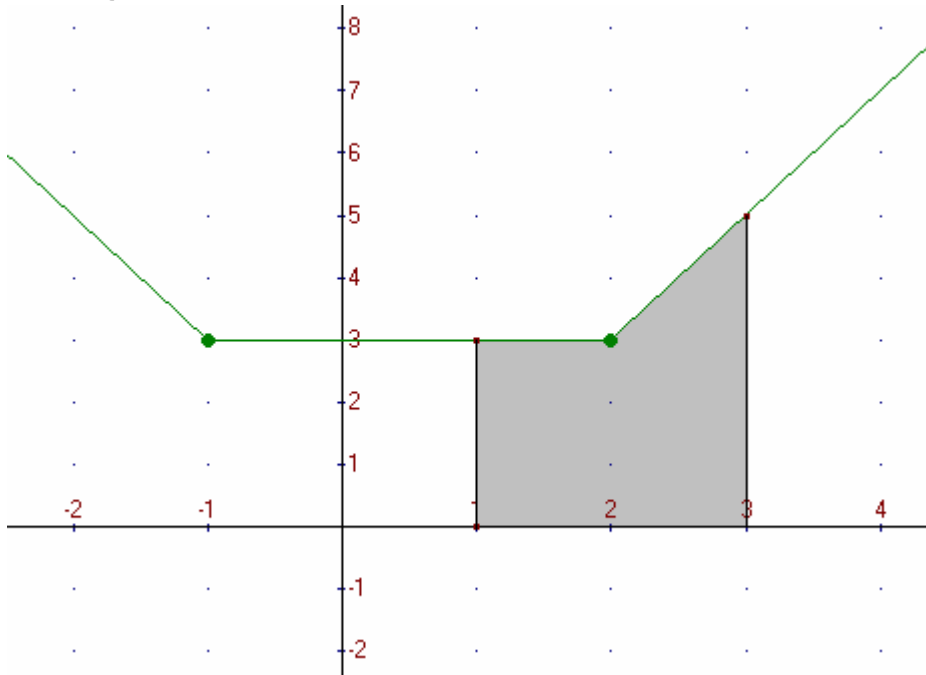
Definim la funció $f(x)$ com funció definida a trossos:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x \leq -1 \\ 3 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 2x-1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

La funció és contínua en \mathbb{R}

La funció és derivable en $\mathbb{R} \sim \{-1, 2\}$

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



b)

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 3dx + \int_2^3 (2x-1)dx = 3x \Big|_1^2 + (x^2 - x) \Big|_2^3 = 7.$$

54.- Calculeu:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (\sqrt{2n-1} + \sqrt{2(2n-2)} + \dots + \sqrt{k(2n-k)} + \dots + \sqrt{n(2n-n)})$$

Oposicions Catalunya 2000.

Solució:

Transformaren la suma per una integral: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{1}{n} \left(2 - \frac{1}{n}\right)} + \sqrt{\frac{2}{n} \left(2 - \frac{2}{n}\right)} + \dots + \sqrt{\frac{k}{n} \left(2 - \frac{k}{n}\right)} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n} \left(2 - \frac{n}{n}\right)} \right) = \\ &= \int_0^1 \sqrt{x(2-x)} dx \end{aligned}$$

$$\text{Calculem } \int \sqrt{x(2-x)} dx = \int \sqrt{1 - (x-1)^2} dx$$

Efectuem el canvi $x-1 = \sin t$, $dx = \cos t dt$.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x(2-x)} dx &= \int (1 - \sin^2 t) \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + C = \\ &= \frac{1}{2} \arcsin(x-1) + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin(x-1)) + C. \end{aligned}$$

Aleshores:

$$L = \int_0^1 \sqrt{x(2-x)} dx = \left. \frac{1}{2} \arcsin(x-1) + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin(x-1)) \right|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

55.- Un con circular es talla per un pla perpendicular a l seu eix, determinant un cercle que és base d'un altre con, el qual té el vèrtex en el centre de la base del primer con. Determineu el con de volum màxim que es pot construir de la manera indicada i la relació entre el dos cons.

Oposicions de Catalunya 1999.

Solució:

Siga $R = \overline{BH}$ el radi de la base del con inicial i $h = \overline{AH}$ la seua altura.

Siga $r = \overline{DF}$ el radi de la base del cercle del con que es determina pel tall perpendicular, siga $x = \overline{AF}$ la seua altura.

L'altura del con que té el vèrtex en el centre de la base del primer con té radi r i altura $h - x$.

El volum del d'aquest darrer con és:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2(h - x)$$

Els triangles $\triangle AFE$, $\triangle AHC$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{r} = \frac{h}{R}, \text{ aleshores, } x = \frac{h}{R}r.$$

Aleshores el volum del con és:

$$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2\left(h - \frac{h}{R}r\right)$$

$$V(r) = \frac{1}{3}\pi\left(hr^2 - \frac{h}{R}r^3\right). \text{ Derivem la funció i igulem la derivada a zero:}$$

$$V'(r) = \frac{1}{3}\pi\left(2hr - \frac{3h}{R}r^2\right)$$

$$V'(r) = 0, \quad 2hr - \frac{3h}{R}r^2 = 0, \quad \text{Resolent l'equació: } r = \frac{2R}{3}.$$

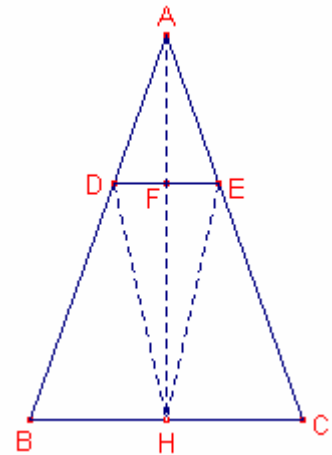
Calculem el signe de la segona derivada en $r = \frac{2R}{3}$.

$$V''(r) = \frac{1}{3}\pi\left(2h - \frac{6h}{R}r\right), \quad V''\left(\frac{2R}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(2h - \frac{6h}{R}\frac{2R}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi(-2h) < 0.$$

Aleshores, en $r = \frac{2R}{3}$ s'assoleix el màxim del volum.

La raó entre els volum de l'últim con i de l'inicial és:

$$\frac{V_{\text{últimMàxim}}}{V_{\text{inicial}}} = \frac{\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2R}{3}\right)^2\left(h - \frac{h}{R}\frac{2R}{3}\right)}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} = 4.$$



56.- Calculeu l'àrea limitada per $y^2 = \frac{1-x}{1+x}$ i la seua asímtota.

Oposicions Catalunya 1999.

Solució:

El domini de la funció és $]-1,1]$

La asímtota vertical és la recta $x = -1$ on s'anul·la el denominador.

La gràfica de la funció és:

La funció inversa és:

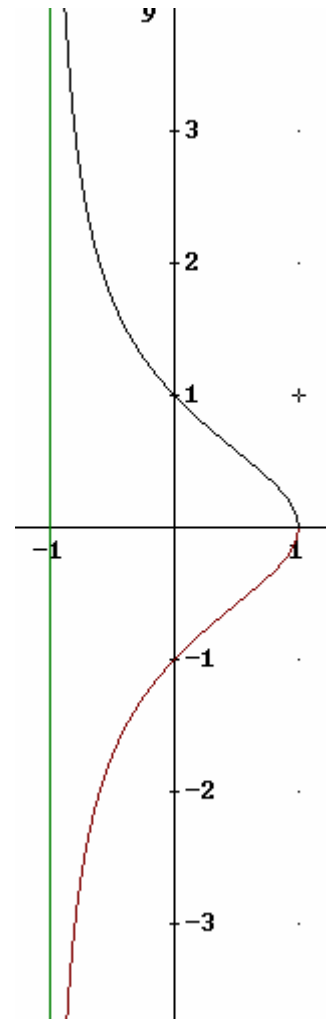
$$f(x) = -1 + \frac{2}{1+x^2}.$$

Siga $g(x) = \frac{2}{1+x^2}$ traslladada vertical de l'anterior de l'anterior.

L'àrea buscada és $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

O bé:

$$2 \int_0^{+\infty} g(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+x^2} dx = 2(2 \cdot \arctg x) \Big|_0^{+\infty} = 2 \left(\frac{2\pi}{2} - 0 \right) = 2\pi.$$



57.- Calculeu la integral $\int_0^{1993} \left(\frac{E(x)}{2} - E\left(\frac{x}{2}\right) \right) dx$, on $E(x)$ és la funció part entera:

Oposicions Catalunya 1993.

Solució:

$$\int_0^{1993} \left(\frac{E(x)}{2} - E\left(\frac{x}{2}\right) \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{1993} E(x) dx - \int_0^{1993} E\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$E(x) = k \quad k \leq x < k+1 \quad \text{on } k = 0, 1, 2, \dots$$

En la gràfica hi ha 1993 rectangles de base 1 i altures: 0, 1, 2, ..., 1992.

$$\int_0^{1993} E(x) dx = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \dots + 1 \cdot 1992 = 0 + 1 + 2 + \dots + 1992 = \frac{0 + 1992}{2} \cdot 1993 = 996 \cdot 1993$$

$$E\left(\frac{x}{2}\right) = k \quad 2k \leq x < 2k+2 \quad \text{on } k = 0, 1, 2, \dots$$

En la gràfica hi ha 996 rectangles de base 2 i altures: 0, 1, 2, ..., 995 i un rectangle de base 1 i altura 996.

$$\int_0^{1993} E\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2 \cdot 995 + 1 \cdot 996 = 2 \frac{0 + 995}{2} \cdot 996 + 996 = 995 \cdot 996 + 996 = 996^2$$

$$\int_0^{1993} \left(\frac{E(x)}{2} - E\left(\frac{x}{2}\right) \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{1993} E(x) dx - \int_0^{1993} E\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \cdot 996 \cdot 1993 - 996^2 = 498.$$

58.- Siga $f(x)$ una funció contínua en $[0,1]$ i derivable en $]0,1[$ amb $f(0) = 0$ i $f'(x)$ creixent. Demostreu que és creixent $\frac{f(x)}{x}$.

Oposicions Catalunya 1999.

Solució:

Siga $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in]0,1[$. $g'(x) = \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2}$, $x \in]0,1[$.

Siga $x \in]0,1[$ $f(x)$ una funció contínua en $[0, x]$ i derivable en $]0, x[$.

Aplicant el teorema de Lagrange:

$\exists c \in]0, x[$ tal que $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$.

$\frac{f(x)}{x} = f'(c)$, $0 < c < x < 1$

Com $f'(x)$ creixent, $f'(c) < f'(x)$, $0 < c < x < 1$

Aleshores, $\frac{f(x)}{x} < f'(x)$,

$g'(x) = \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{1}{x} \frac{f(x)}{x} > \frac{f'(x)}{x} - \frac{f'(x)}{x} = 0$

Aleshores, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ és creixent.

59.- Discuti en funció de k , el nombre de solucions de l'equació: $kx - e^x = 0$.
Oposicions Catalunya 1993.

Solució:

$$\text{Siga } f(x) = kx - e^x$$

El seu domini és \mathbb{R} . És contínua i derivable en \mathbb{R} $f'(x) = k - e^x$.

Si $k = 0$

$$f(x) = -e^x \quad f(x) = 0 \text{ no té solució ja que } e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Si $k < 0$

$f'(x) = k - e^x < 0$, aleshores, la funció és decreixent.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (kx - e^x) = +\infty - 0 = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (kx - e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\frac{kx}{e^x} - 1 \right) = +\infty(-1) = -\infty.$$

Aleshores, l'equació inicial té una única solució.

Si $k > 0$

$f'(x) = 0$, $k - e^x = 0$ l'equació té solució única, $x = \ln k$.

$$f''(x) = -e^x, \quad f''(\ln k) = -e^{\ln k} = -k < 0.$$

Aleshores, $x = \ln k$ és el màxim de la funció.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (kx - e^x) = -\infty - 0 = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (kx - e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\frac{kx}{e^x} - 1 \right) = +\infty(-1) = -\infty.$$

$$f(\ln k) = k \cdot \ln k - e^{\ln k} = k \cdot \ln k - k$$

Si $f(\ln k) > 0$ l'equació té dues solucions reals distintes.

$$k \cdot \ln k - k > 0.$$

$\ln k > 1$, és a dir si $k > e$.

Si $f(\ln k) < 0$ l'equació no té solució.

És a dir si $k < e$.

Si $f(\ln k) = 0$ l'equació té una solució.

És a dir si $k = e$.

60.- Considereu la funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la forma $f(x) = \ln(x) - x + 3$.

- a) Demostreu que $f(x) = 0$ té exactament dues solucions a i b tals que $a < 1 < b$.
 b) Donat un punt $x_1 \in]1, b[$, definim la successió $\{x_n\}$ de la forma $x_{n+1} = 3 + \ln(x_n)$, $n > 0$. Demostreu que $x_n \in]1, b[$, $\forall n \in \mathbb{N}$ i que $\{x_n\}$ és convergent. Calculeu el límit.
 Oposicions Catalunya 2000.

Solució:

a)

El domini de la funció és $]0, +\infty[$. És contínua i derivable en $]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1. \quad f'(x) = 0 \text{ si i només si, } x = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2}, \quad f''(1) = -1 < 0. \text{ Aleshores, } x = 1 \text{ és un màxim de la funció.}$$

$$f(1) = 0 - 1 + 3 = 2 > 0$$

$f'(x) > 0$ si $x \in]0, 1[$ aleshores en aquest interval és estrictament creixent.

$f'(x) < 0$ si $x \in]1, +\infty[$ aleshores en aquest interval és estrictament decreixent.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) - x + 3 = -\infty - 0 + 3 = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln(x)}{x} - 1 + \frac{3}{x} \right) = +\infty(0 - 1 + 0) = -\infty.$$

$f(x)$ és estrictament creixent quan $x \in]0, 1[$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $f(1) > 0$.

Aleshores, existeix un únic $a \in]0, 1[$ tal que $f(x) = 0$.

$f(x)$ és estrictament decreixent quan $x \in]1, +\infty[$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $f(1) > 0$.

Aleshores, existeix un únic $b \in]1, +\infty[$ tal que $f(x) = 0$.

b)

vegem que la successió és monòtona creixent $x_{n+1} > x_n$ per inducció:

$$\text{Si } n = 1, \quad x_2 = 3 + \ln(x_1) > 3 + \ln(1) >$$

Per hipòtesi:

Per l'apartat a) si $x_1 \in]1, b[$, $\ln(x_1) - x_1 + 3 > 0$. Aleshores, $x_2 = \ln(x_1) + 3 > x_1 > 1$.

Suposem certa la relació per a $n = k$, $x_{k+1} > x_k$.

Demostrem la relació per a $n = k + 1$:

$$x_{k+2} = 3 + \ln(x_{k+1}) \underset{HI}{>} 3 + \ln(x_k) = x_{k+1}.$$

Aleshores, la successió és monòtona.

Vegem que per inducció que $x_n < b$.

Si $n = 1$, Per hipòtesi $x_1 < b$

Suposem certa la relació per a $n = k$, $x_k < b$

Demostrem la relació per a $n = k + 1$:

Per l'apartat a) $3 + \ln(b) = b$

$$x_{k+1} = 3 + \ln(x_k) \underset{HI}{<} 3 + \ln(b) = b$$

La successió $\{x_n\}$ és monòtona creixent i afitada superiorment, aleshores, és convergent.

Siga x el seu límit:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + \ln(x_n))$$

$$x = 3 + \ln(x)$$

Per l'apartat a) l'única solució és $x = b$.