

61.- Siga l'equació $\ln x - \frac{x}{\lambda} = 0$, amb $\lambda \in \mathbb{R}$ i $\lambda \neq 0$.

a) Demostreu que existeix λ real per al qual l'equació no té solució i a més a més no és únic.

b) Determineu en funció de λ el nombre de solucions que té l'equació.

Oposicions Castella la Manxa 2004.

Solució:

$$\text{Siga } f(x) = \ln x - \frac{x}{\lambda}$$

El seu domini és $]0, +\infty[$. És contínua i derivable en $]0, +\infty[$ $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\lambda}$.

Si $\lambda < 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\lambda} > 0$, aleshores, la funció és creixent.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - \frac{x}{\lambda} \right) = -\infty - 0 = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{x}{\lambda} \right) = +\infty + (+\infty) = +\infty.$$

Aleshores, l'equació inicial té una única solució.

Si $\lambda > 0$

$f'(x) = 0$, $\frac{1}{x} = \frac{1}{\lambda}$ l'equació té solució única, $x = \lambda$.

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2}, \quad f''(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} < 0.$$

Aleshores, $x = \lambda$ és el màxim de la funció.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - \frac{x}{\lambda} \right) = -\infty - 0 = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{x}{\lambda} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{\lambda} \right) = +\infty \left(0 - \frac{1}{\lambda} \right) = -\infty.$$

$$f(\lambda) = \ln \lambda - 1$$

Si $f(\lambda) > 0$ l'equació té dues solucions reals distintes.

$\ln \lambda > 1$, és a dir si $\lambda > e$.

Si $f(\lambda) < 0$ l'equació no té solució. És a dir si $0 < \lambda < e$.

Si $f(\lambda) = 0$ l'equació té una solució. És a dir si $\lambda = e$.

62.- Calculeu la suma de les àrees de les regions del primer quadrant limitades per la corba $y = e^{-x} \sin x$ i l'eix OX.
Oposicions Conca 1998.

Solució:

$e^{-x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, en particular, $\forall x \in [0, +\infty[$
 $\sin x > 0$, quan $x \in [2\pi k, 2\pi k + \pi]$, $\forall k = 0, 1, 2, \dots$

$$I = \int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx = -e^{-x} \cos x - (e^{-x} \sin x + I)$$

$$\begin{array}{l} u = e^{-x} \quad du = -e^{-x} dx \\ dv = \sin x dx \quad v = -\cos x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} u = e^{-x} \quad du = -e^{-x} dx \\ dv = \cos x dx \quad v = \sin x \end{array}$$

$$2I = -e^{-x} (\sin x + \cos x)$$

$$I = \frac{-e^{-x} (\sin x + \cos x)}{2}$$

$$\int_{2\pi k}^{2\pi k + \pi} e^{-x} \sin x dx = \left. \frac{-e^{-x} (\sin x + \cos x)}{2} \right|_{2\pi k}^{2\pi k + \pi} = \frac{e^{-(2\pi k + \pi)} + e^{-2\pi k}}{2} = \frac{(1 + e^{-\pi})}{2} \left(\left(\frac{1}{e} \right)^{2\pi} \right)^k.$$

La suma de les àrees és:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1 + e^{-\pi}}{2} \left(\left(\frac{1}{e} \right)^{2\pi} \right)^k \right) = \frac{1 + e^{-\pi}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{e} \right)^{2\pi} \right)^k = \frac{1 + e^{-\pi}}{2} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{e} \right)^{2\pi}} = \frac{e^{\pi}}{2(e^{\pi} - 1)} \approx 0,5225829$$

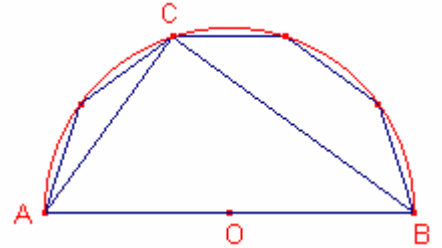
El darrer pas és la suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica de primer

terme 1 i raó $0 < \left(\frac{1}{e} \right)^{2\pi} < 1$.

63.- Una semicircumferència de radi r es divideix en $n + 1$ parts iguals i s'uneix un punt qualsevol de la divisió amb els extrems, formant-se un triangle rectangle d'àrea $A(k)$. Es demana calcular el límit quan n tendeix a més infinit de la mitjana aritmètica de les àrees d'aquests triangles.
Oposicions de Múrcia 1998.

Solució:

Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre \overline{AB} .
Siga C el punt de la part k de les $n + 1$ parts que divideixen la semicircumferència en $n + 1$ parts iguals, comptant des de A (l'última part $n+1$ és el punt B)
Siga $\alpha = \angle ABC$, és un angle inscrit, la seua mesura és la meitat de l'arc que abraça.



Aleshores, $\alpha = \angle ABC = \frac{\pi}{n+1}k = \frac{\pi}{2(n+1)}k$, $k = 1, 2, 3, \dots, n+1$

Siga $x_k = \overline{AC}$, $y_k = \overline{BC}$

El triangle $\triangle ABC$ és rectangle. Aplicant raons trigonomètriques:

$$\frac{x_k}{2r} = \sin\left(\frac{\pi}{2(n+1)}k\right), \quad \frac{y_k}{2r} = \cos\left(\frac{\pi}{2(n+1)}k\right).$$

L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és:

$$\frac{x_k \cdot y_k}{2} = 2r^2 \sin\left(\frac{\pi}{2(n+1)}k\right) \cos\left(\frac{\pi}{2(n+1)}k\right) = r^2 \cdot \sin\left(\pi \frac{k}{n+1}\right)$$

La mitjana aritmètica de les àrees dels $n+1$ triangles rectangles formats és:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n+1} r^2 \cdot \sin\left(\pi \frac{k}{n+1}\right)}{n+1} = r^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1} \cdot \sin\left(\pi \frac{k}{n+1}\right) = r^2 \int_0^1 \sin(\pi x) = r^2 \cdot \left. \frac{-\cos(\pi x)}{\pi} \right|_0^1 = \frac{2r^2}{\pi}.$$

64.- Donada la funció $f(x) = |x^3 - 6x^2 + 5x| + 2x - 2$.

- a) Determineu els seus elements gràfics més rellevants (intervalls de creixement i decreixement, màxims i mínims, etc.) i representeu-la gràficament.
 b) Calculeu l'angle que formen les dues rectes tangents laterals a la corba en els punts $x = 1$, $x = 5$

Oposicions Catalunya 1997.

Solució:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 6x^2 - 3x - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 - 6x^2 + 7x - 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -x^3 + 6x^2 - 3x - 2 & \text{si } 1 < x \leq 5 \\ x^3 - 6x^2 + 7x - 2 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

La funció és contínua en \mathbb{R} i derivable en $\mathbb{R} \sim \{0,1,5\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 12x - 3 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 - 12x + 7 & \text{si } 0 < x < 1 \\ -3x^2 + 12x - 3 & \text{si } 1 < x < 5 \\ 3x^2 - 12x + 7 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -6x + 12 & \text{si } x < 0 \\ 6x - 12 & \text{si } 0 < x < 1 \\ -6x + 12 & \text{si } 1 < x < 5 \\ 6x - 12 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Els punts de tall són:

$$-x^3 + 6x^2 - 3x - 2 = 0, \quad x = 1, x = \frac{5 - \sqrt{32}}{2} \quad (\text{les dues en el domini}).$$

$$x^3 - 6x^2 + 7x - 2 = 0, \quad x = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}, x = 1, \quad (\text{les dues en el domini}).$$

$$f'(x) = 0$$

$$-3x^2 + 12x - 3 = 0, \quad x = 2 + \sqrt{3}.$$

$$3x^2 - 12x + 7 = 0, \quad x = \frac{6 - \sqrt{15}}{3}.$$

Estudiant el signe de la primera derivada:

$$\text{La funció és creixent en: } \left] 0, \frac{6 - \sqrt{15}}{3} \right[\cup] 1, 2 + \sqrt{3} \left[\cup] 5, +\infty \left[.$$

$$\text{La funció és decreixent en: }] -\infty, 0 \left[\cup \right] \frac{6 - \sqrt{15}}{3}, 1 \left[\cup] 2 + \sqrt{3}, 5 \left[.$$

$x = 0$, $x = 1$, $x = 5$ mínims relatius.

$$x = \frac{6 - \sqrt{15}}{3}, \quad x = 2 + \sqrt{3}, \quad \text{màxims relatius.}$$

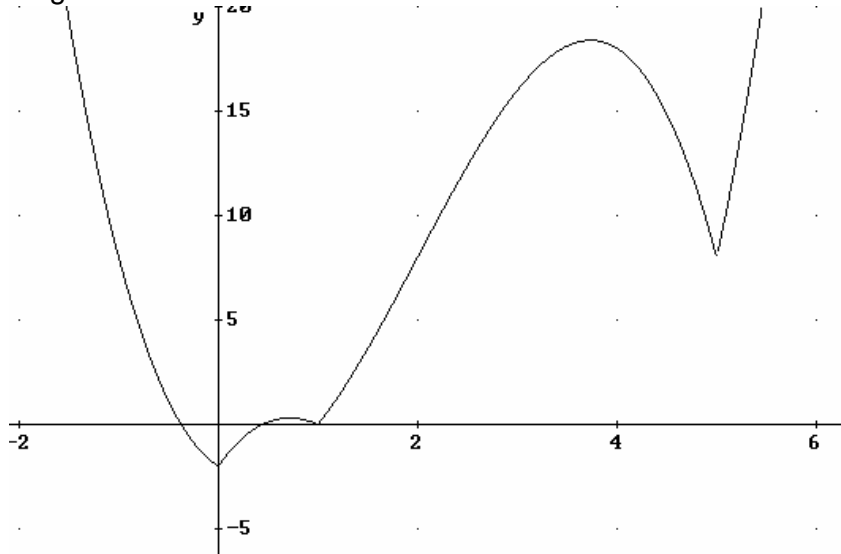
Estudiem el signe de la segona derivada, per estudiar la concavitat-convexitat.

$$f''(x) = 0 \quad \text{si } x = 2,$$

$$f''(x) > 0, \quad \text{en l'interval }] -\infty, 0 \left[\cup] 1, 2 \left[\cup] 5, +\infty \left[\quad \text{és còncava.}$$

$$f''(x) < 0, \quad \text{en l'interval }] 0, 1 \left[\cup] 2, 5 \left[\quad \text{la funció és convexa.}$$

La gràfica de la funció és:



b)

$$f'(1^+) = 6.$$

$$f'(1^-) = -2.$$

El vector director de la recta tangent a la corba en 1 per la dreta és (1,6)

El vector director de la recta tangent a la corba en 1 per la esquerra és (1,-2)

Calculem l'angle que formen les dues rectes:

$$(1,6)(1,-2) = \sqrt{37}\sqrt{5} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{-11}{\sqrt{37}\sqrt{5}}.$$

$$f'(5^+) = 22.$$

$$f'(5^-) = -18.$$

El vector director de la recta tangent a la corba en 5 per la dreta és (1,22)

El vector director de la recta tangent a la corba en 5 per la esquerra és (1,-18)

Calculem l'angle que formen les dues rectes:

$$(1,22)(1,-18) = \sqrt{485}\sqrt{325} \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{-395}{\sqrt{485}\sqrt{325}}.$$

65.- Determineu els valors de a a fi que l'equació $a \cdot 3^x + 3^{-x} = 3$ tinga solució única.

Solució:

Siga la funció $f(x) = a \cdot 3^x + 3^{-x} - 3$. La funció és contínua i derivable en \mathbb{R} .

$$f'(x) = a \cdot \ln 3 \cdot 3^x - \ln 3 \cdot 3^{-x}.$$

Suposem que $a = 0$

$$3^{-x} = 3, \text{ té solució única } x = -1.$$

Suposem que $a < 0$.

Aleshores, $f'(x) < 0$, és a dir, la funció és estrictament decreixent en \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \cdot 0 + \infty - 3 = +\infty. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \cdot (+\infty) + 0 - 3 = -\infty.$$

Per ser estrictament decreixent, i contínua, existeix un únic $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $f(x_0) = 0$, és a dir, $x_0 \in \mathbb{R}$ solució única de l'equació inicial.

Suposem $a > 0$.

$$f'(x) = 0. \quad a \cdot \ln 3 \cdot 3^x - \ln 3 \cdot 3^{-x} = 0.$$

$$a \cdot 3^x = 3^{-x}. \quad 3^{2x} = \frac{1}{a}. \quad 2x = -\log_3 a.$$

$$x = \log_3 a^{-\frac{1}{2}}.$$

$$f''(x) = a \cdot \ln^2 3 \cdot 3^x + \ln^2 3 \cdot 3^{-x}. \quad f''(\log_3 a^{-\frac{1}{2}}) = a \cdot \ln^2 3 \cdot a^{\frac{-1}{2}} + \ln^2 3 \cdot a^{\frac{1}{2}} > 0.$$

Aleshores, $x = \log_3 a^{-\frac{1}{2}}$ és un mínim relatiu de la funció.

Estudiem la monotonía de la funció.

$$f'(x) > 0.$$

$$a \cdot \ln 3 \cdot 3^x - \ln 3 \cdot 3^{-x} > 0. \quad a \cdot 3^x = 3^{-x}$$

$$3^{2x} > \frac{1}{a}. \quad x > \log_3 a^{-\frac{1}{2}}. \text{ La funció és creixent en } \left] \log_3 a^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right[.$$

$$f'(x) < 0. \quad x < \log_3 a^{-\frac{1}{2}}. \text{ La funció és decreixent en } \left] -\infty, \log_3 a^{-\frac{1}{2}} \right[.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \cdot 0 + \infty - 3 = +\infty. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \cdot (+\infty) + 0 - 3 = +\infty.$$

$$f(\log_3 a^{-\frac{1}{2}}) = a \cdot a^{\frac{-1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} - 3 = 2\sqrt{a} - 3.$$

Si $2\sqrt{a} - 3 > 0$, (si $a > \frac{9}{4}$), la funció $f(x)$ no té punt de tall amb l'eix d'abscisses, és a dir, l'equació inicial no té solució.

Si $2\sqrt{a} - 3 = 0$, si $a = \frac{9}{4}$, la funció $f(x)$ té un punt de tall amb l'eix d'abscisses, és a

dir l'equació inicial té solució única. I la solució és, $x = \log_3 \left(\frac{9}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} = \log_3 \frac{2}{3}$.

Si $2\sqrt{a} - 3 < 0$, (si $a < \frac{9}{4}$), la funció $f(x)$ té 2 punts de tall amb l'eix d'abscisses, és a dir, l'equació inicial té 2 solucions distintes.

66.- Calculeu l'àrea afitada per la corba $x(x^2 + y^2) - a \cdot y^2 = 0$ i la seua asímtota $a > 0$.
Oposicions Cantàbria 2004.

Solució:

La corba és la cissoide de Diocles.

El domini de la corba és $[0, a[$.

Aillem la incògnita y :

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{a-x}}, \quad x \in [0, a[$$

La corba és simètrica respecte de l'eix d'abscisses.

Considerem la funció $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{a-x}}$

L'asímtota de la corba és la recta $x = a$.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty.$$

L'àrea afitada per la corba i l'asímtota és:

$$2 \int_0^a f(x) dx.$$

$$\int \sqrt{\frac{x^3}{a-x}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \left(1 - \left(1 - \frac{2}{a}x\right)^2\right)}} dx =$$

Efectuem el canvi: $1 - \frac{2}{a}x = \sin t \quad dx = \frac{-a}{2} \cos t dt$

$$= \int \left((1 - \sin t) \frac{a}{2} \right)^2 \frac{1}{\frac{a}{2} \cos t} \left(\frac{-a}{2} \right) \cos t dt =$$

$$= \frac{-a^2}{4} \int (1 - \sin t)^2 dt =$$

$$= \frac{-a^2}{4} \int (\sin^2 t - 2 \sin t + 1) dt =$$

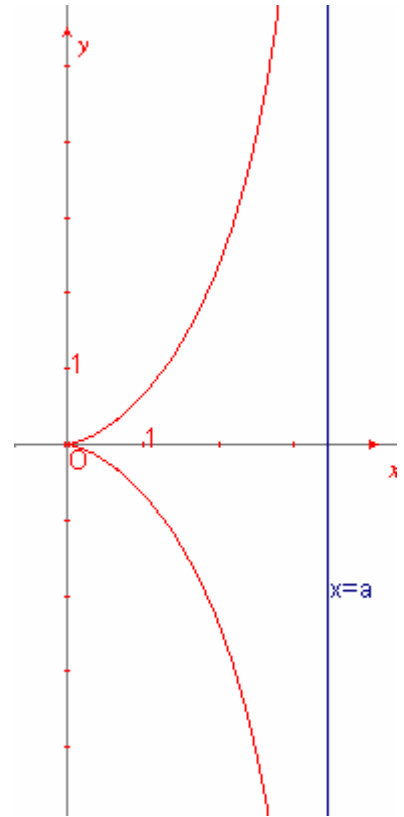
$$= \frac{-a^2}{4} \int \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} - 2 \sin t + 1 \right) dt =$$

$$= \frac{-a^2}{4} \left(\frac{3}{2}t - \frac{\sin 2t}{4} + 2 \cos t \right) =$$

$$= \frac{-a^2}{4} \left(\frac{3}{2} \arcsin \left(1 - \frac{2}{a}x \right) - \frac{1}{4} \sin \left(2 \arcsin \left(1 - \frac{2}{a}x \right) \right) + 2 \cos \left(\arcsin \left(1 - \frac{2}{a}x \right) \right) \right) + C.$$

$$2 \int_0^a f(x) dx = \frac{-a^2}{2} \left(\frac{3}{2} \arcsin \left(1 - \frac{2}{a}x \right) - \frac{1}{4} \sin \left(2 \arcsin \left(1 - \frac{2}{a}x \right) \right) + 2 \cos \left(\arcsin \left(1 - \frac{2}{a}x \right) \right) \right) \Big|_0^a =$$

$$= \frac{3\pi}{4} a^2$$



67.- Calculeu el domini, les asímptotes, els màxims i mínims i feu un esquema senzill

de la gràfica de la funció $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}{\sqrt{|x^2-4|}}$.

Solució:

El domini de la funció és: Domini = $\mathbb{R} \sim \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 = 0\} = \mathbb{R} \sim \{-2, 2\}$

Podem definir la funció a trossos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}{\sqrt{x^2-4}} & \text{si } x \notin [-2, 2] \\ \frac{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}{\sqrt{4-x^2}} & \text{si } x \in]-2, 2[\end{cases}$$

La recta $x = -2$ és una asímptota vertical ja que $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}{\sqrt{|x^2-4|}} = \frac{\sqrt[3]{-12}}{0} = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}{\sqrt{x^2-4}} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}{\sqrt{4-x^2}} = -\infty$$

La recta $x = 2$ és una asímptota vertical ja que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}{\sqrt{|x^2-4|}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{0} = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty$$

Asímptotes horitzontals:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}{\sqrt{x^2-4}} = -1, \text{ aleshores la recta } y = -1 \text{ és una asímptota horitzontal}$$

quan x tendeix a menys infinit. La corba va sota l'asímptota.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}{\sqrt{x^2-4}} = 1, \text{ aleshores la recta } y = 1 \text{ és una asímptota horitzontal}$$

quan x tendeix a més infinit. La corba va per sota de l'asímptota.

Estudiem els màxims i mínims:

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}{\sqrt{|x^2-4|}} = \begin{cases} -\sqrt[6]{\frac{x^4(x-1)^2}{|x^2-4|^3}} & \text{si } x < -2 \\ -\sqrt[6]{\frac{x^4(x-1)^2}{|4-x^2|^3}} & \text{si } -2 < x < 2 \\ \sqrt[6]{\frac{x^4(x-1)^2}{|x^2-4|^3}} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \sqrt[6]{\frac{x^4(x-1)^2}{|x^2-4|^3}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Siga $g_1(x) = \sqrt[6]{x}$, $h(x) = \frac{x^4(x-1)^2}{|x^2-4|^3}$. Tenim aleshores que $f(x) = (g_1 \circ h)(x)$ si $x \geq 1$.

La funció $g_1(x)$ és contínua i estrictament creixent en $[0, +\infty[$.

Els màxims i mínims de la funció $f(x)$ són els màxims i mínims de la funció $h(x)$ per ser $g_1(x)$ estrictament creixent.

Siga $g_2(x) = -\sqrt[6]{x}$, $h(x) = \frac{x^4(x-1)^2}{|x^2-4|^3}$. Tenim aleshores que $f(x) = (g_2 \circ h)(x)$ si $x < 1$.

La funció $g_2(x)$ és contínua i estrictament decreixent en $[0, +\infty[$.

Els màxims i mínims de la funció $f(x)$ són els mínims i màxims de la funció $h(x)$ per ser $g_2(x)$ estrictament decreixent.

$$h(x) = \frac{x^4(x-1)^2}{|x^2-4|^3} = \begin{cases} \frac{x^4(x-1)^2}{(x^2-4)^3} & \text{si } x \notin [-2, 2] \\ \frac{x^4(x-1)^2}{(4-x^2)^3} & \text{si } x \in]-2, 2[\end{cases}$$

La funció $h(x)$ és contínua i derivable en $\mathbb{R} \sim \{-2, 2\}$

La funció $f(x)$ no és derivable en $x = 0, 1$.

$$h'(x) = \begin{cases} \frac{2x^3(x-1)(x^2-12x+8)}{(x^2-4)^4} & \text{si } x \notin [-2, 2] \\ \frac{2x^3(1-x)(x^2-12x+8)}{(4-x^2)^4} & \text{si } x \in]-2, 2[\end{cases}$$

Si resollem $h'(x) > 0$, la funció és estrictament creixent en

$$]-\infty, -2[\cup]0, 6 - 2\sqrt{7}, 2[\cup]1, 2[\cup]6 + 2\sqrt{7}, +\infty[$$

Si resollem $h'(x) < 0$, la funció és estrictament decreixent en

$$]-2, 0[\cup]6 - 2\sqrt{7}, 1[\cup]2, 6 + 2\sqrt{7}[.$$

Aleshores la funció $f(x)$ és creixent: $]-2, 0[\cup]6 - 2\sqrt{7}, 1[\cup]1, 2[\cup]6 + 2\sqrt{7}, +\infty[$

Aleshores la funció $f(x)$ és decreixent: $]-\infty, -2[\cup]0, 6 - 2\sqrt{7}, 2[\cup]2, 6 + 2\sqrt{7}[$

En $x = 0$ la funció $f(x)$ és contínua i passa de ser creixent a decreixent, aleshores és un màxim relatiu estricte.

En $x = 6 - 2\sqrt{7}$ la funció $f(x)$ és contínua i passa de ser decreixent a creixent, aleshores és un mínim relatiu estricte

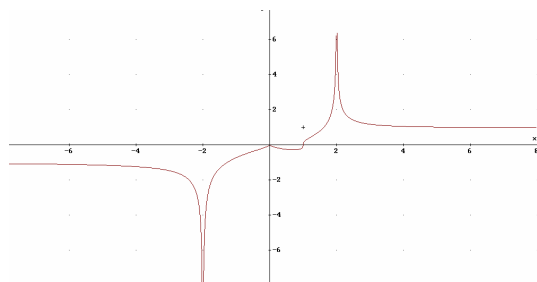
En $x = 6 + 2\sqrt{7}$ la funció $f(x)$ és contínua i passa de ser decreixent a creixent, aleshores és un mínim relatiu estricte

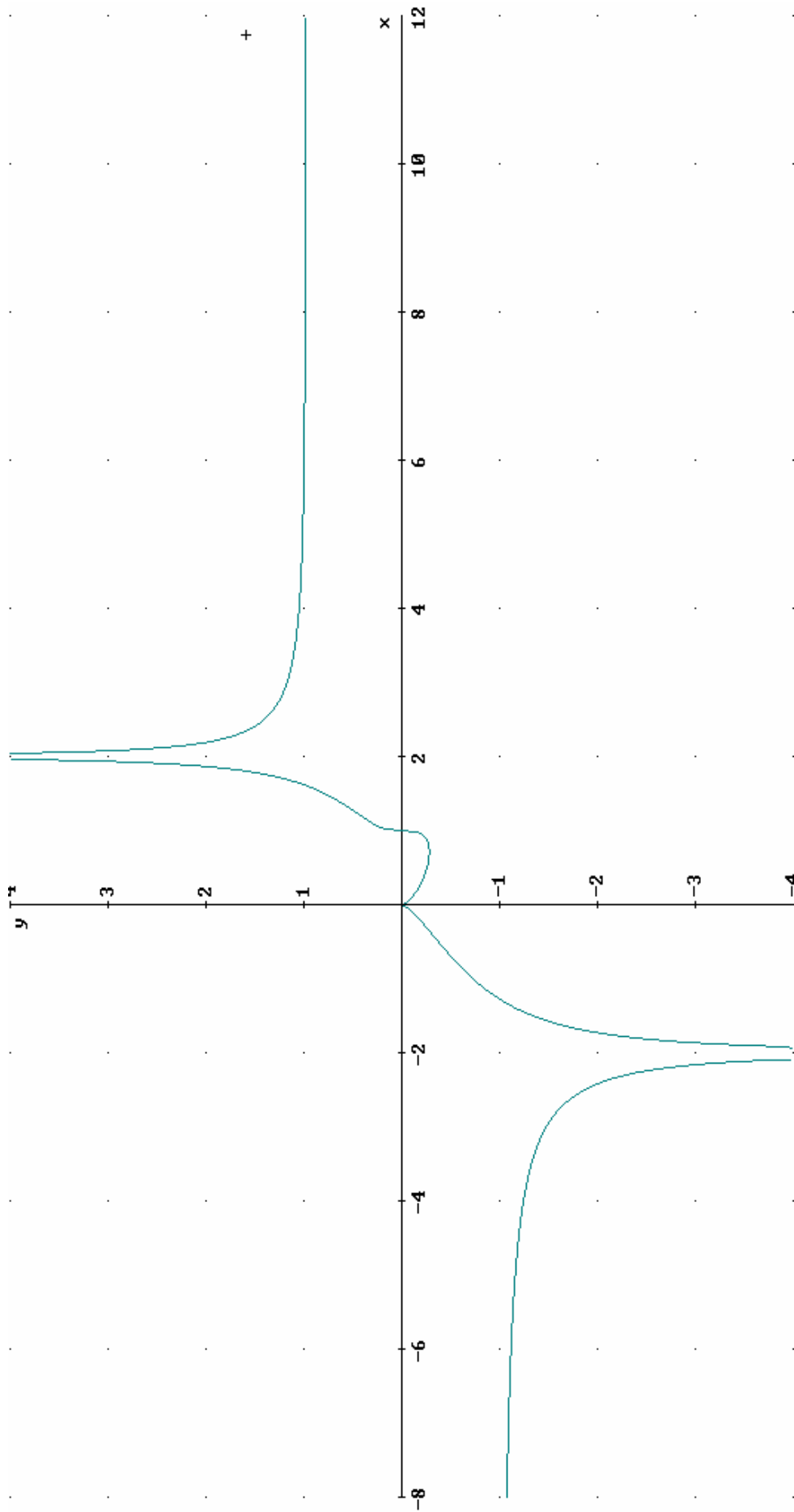
Aleshores el màxim relatiu estricte de $f(x)$ s'assoleix en $x = 0$, $(0, 0)$

Aleshores els mínim relatiu estricte de $f(x)$

s'assoleix en $x = 6 - 2\sqrt{7}$, $x = 6 + 2\sqrt{7}$

$$\left(6 - 2\sqrt{7}, -\sqrt[6]{\frac{14\sqrt{7}}{81} - \frac{37}{81}} \right) \left(6 + 2\sqrt{7}, \sqrt[6]{\frac{14\sqrt{7}}{81} + \frac{37}{81}} \right)$$





68.- Calculeu el límit de la suma $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$

Oposicions Madrid 2002

Solució:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{n^2}{n^2 + 1^2} + \frac{n^2}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2 + n^2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right) = \end{aligned}$$

Transformant la suma per una integral Riemann:

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

69.- Representeu les gràfiques de les corbes $y(x^2 + 3) = 1$ i $8xy - x + 1 = 0$.
 Determineu l'àrea limitada per les corbes i els semieixos positius.
 Oposicions Andalusia 1998.

Solució:

Siga $y(x^2 + 3) = 1$ aleshores $f(x) = \frac{1}{3 + x^2}$ és una corba d'Agnesi

Siga $8xy - x + 1 = 0$ aleshores, $g(x) = \frac{x-1}{8x}$ és una hipèrbola.

$f(x) = \frac{1}{3 + x^2}$. La funció és contínua i derivable en \mathbb{R} .

La funció és simètrica respecte de l'eix d'ordenades.

No té punts de tall amb l'eix d'abscisses. $(0, \frac{1}{3})$ és el punt

de tall amb l'eix d'ordenades.

L'interval de creixement és $]-\infty, 0[$

L'interval de decreixement és $]0, +\infty[$

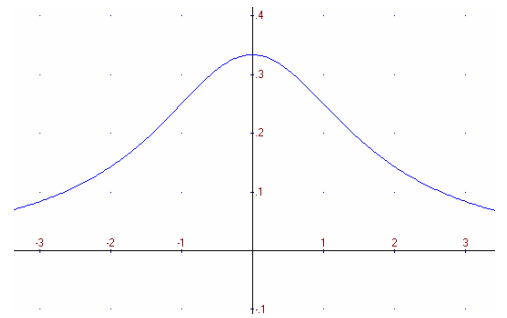
$x = 0$ és un màxim de la funció.

Els intervals de concavitat són $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

L'interval de convexitat és $]-1, 1[$.

$x = -1, 1$ són punts d'inflexió, $(-1, \frac{1}{4})$, $(1, \frac{1}{4})$.

$y = 0$ és una asímptota horitzontal quan $x \rightarrow -\infty$ i quan $x \rightarrow +\infty$.



$g(x) = \frac{x-1}{8x}$ La funció és contínua i derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

No té punts de tall amb l'eix d'ordenades. El punt de tall amb l'eix d'abscisses és $(1, 0)$

L'interval de creixement és $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

L'interval de concavitat és $]-\infty, 0[$.

L'interval de convexitat és $]0, +\infty[$.

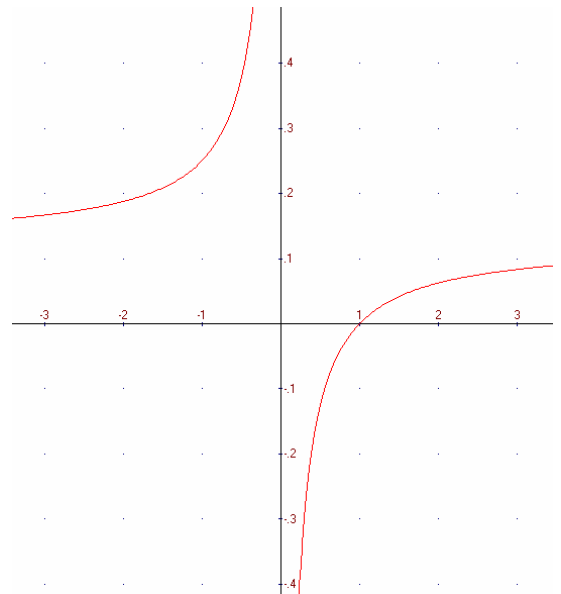
No té punts d'inflexió.

$x = 0$ és una asímptota vertical, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$

$y = \frac{1}{8}$ és una asímptota horitzontal quan $x \rightarrow -\infty$ i

quan $x \rightarrow +\infty$.



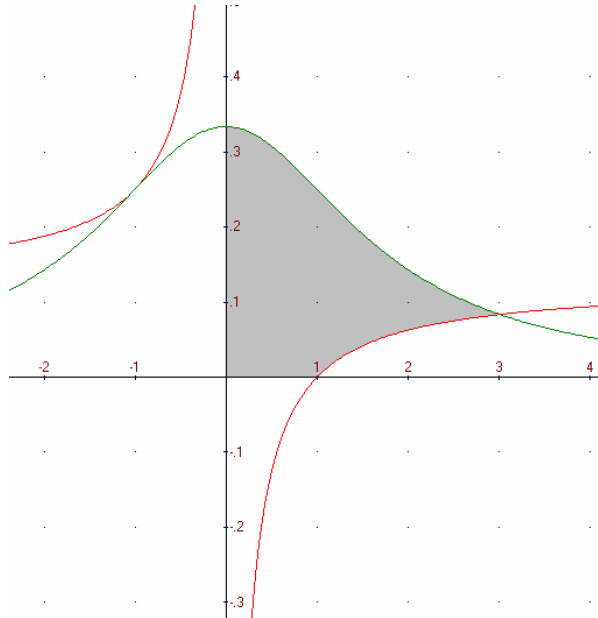
Determinem l'àrea limitada per les corbes i els semieixos positius.

Els punts d'intersecció de les dues corbes és la solució del sistema format per ambdues corbes.

$$\begin{cases} y(x^2 + 3) = 1 \\ 8xy - x + 1 = 0 \end{cases} \text{ les solucions del qual són: } \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{1}{12} \end{cases}$$

L'àrea afitada per les dues corbes i els semieixos positius és:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 (f(x) - g(x))dx = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right) \Bigg|_0^1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right) + \frac{1}{8}(\ln(x) - x) \right) \Bigg|_1^3 = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{18} \pi + \frac{\sqrt{3}}{18} \pi + \frac{1}{8} \ln(3) - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{9} \pi + \frac{1}{8} \ln(3) - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



70.- Es considera la funció real de variable real $f(x) = (x+1)^2 \cdot e^{-x}$.

- Estudieu la funció i representeu-la gràficament.
 - Calculeu la primitiva de $f(x)$ que s'anul·la per a $x = 1$
 - Expresseu l'àrea del recinte limitat per la corba l'eix OX i les rectes $x = 1, x = a > 1$.
 - Calculeu el límit d'aquesta àrea quan a s'aproxima a més infinit.
- Oposicions Andalusia 2004.

Solució:

a)

La funció és contínua i derivable en \mathbb{R} .

La funció és definida positiva.

$$f'(x) = (x+1)(1-x)e^{-x}, \quad f''(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}.$$

El punt de tall amb l'eix d'abscisses és $(-1,0)$

El punt de tall amb l'eix d'ordenades és $(0,1)$

La funció no és simètrica.

L'interval de creixement és $]-1,1[$.

Els intervals de creixement és $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$x = -1$ és un mínim de la funció, $(-1,0)$

$x = 1$ és un màxim de la funció, $\left(1, \frac{4}{e}\right)$.

L'interval de concavitat és

$]-\infty, 1 - \sqrt{2}[\cup]1 + \sqrt{2}, +\infty[$.

L'interval de convexitat és $]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[$.

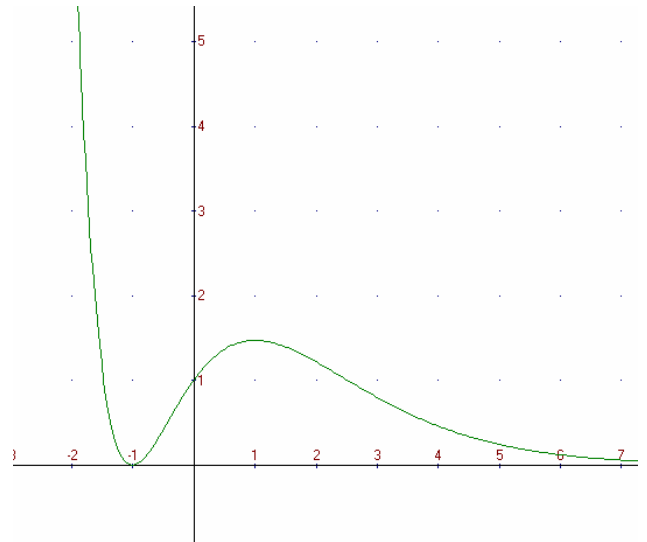
$x = 1 - \sqrt{2}$ és un punt d'inflexió,

$$\left(1 - \sqrt{2}, (2 - \sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1}\right)$$

$x = 1 + \sqrt{2}$ és un punt d'inflexió, $\left(1 + \sqrt{2}, (6 + 4\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}-1}\right)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. La recta $y = 0$ és una asímptota horitzontal quan

$x \rightarrow +\infty$.



b)

Aplicant integració per parts

$$\int (x+1)^2 \cdot e^{-x} dx = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x} + C.$$

$$G(x) = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x} + C.$$

$$G(1) = 0, \quad \frac{-10}{e} + C = 0, \quad C = \frac{10}{e}.$$

c)

$$\int_1^a (x+1)^2 \cdot e^{-x} dx = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x} \Big|_1^a = (-a^2 - 4a - 5)e^{-a} + 10e^{-1}$$

d)

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{-a^2 - 4a - 5}{e^a} + \frac{10}{e} \right) = \frac{10}{e}.$$