

71.- Donada la successió de terme general a_n tal que $a_n = 5a_{n-1} + 3$, $a_1 = 2$.

a) Determineu $E = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{5^n}$.

b) Calculeu $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 3x)^{\frac{1}{x}}$.

Oposicions Andalusia 2004.

Solució:

a)

Calculem el terme general.

$$a_n = 5a_{n-1} + 3$$

$$a_{n+1} = 5a_n + 3$$

Restant ambdues igualtats:

$$a_{n+1} - 6a_n + 5a_{n-1} = 0.$$

L'equació característica de la successió recurrent és:

$$x^2 - 6x + 5 = 0, \text{ les solucions són: } x = 5, x = 1$$

Aleshores el terme general de la successió $\{a_n\}$ és:

$$a_n = A \cdot 5^n + B \cdot 1^n.$$

Calculem A i B utilitzant el primer i segon termes de la successió:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 5 \cdot a_1 + 3 = 13.$$

$$\begin{cases} 2 = 5A + B \\ 13 = 25A + B \end{cases}, \text{ la solució del sistema és: } \begin{cases} A = \frac{11}{20} \\ B = \frac{-3}{4} \end{cases}.$$

$$a_n = \frac{11}{20} \cdot 5^n + \frac{-3}{4}.$$

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{11}{20} 5^n + \frac{-3}{4}}{5^n} = \frac{11}{20}.$$

b)

Siga $\lambda = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 3x)^{\frac{1}{x}}$. El límit és una indeterminació de la forma 1^∞ .

$$\ln \lambda = \lim_{x \rightarrow 0} \ln (e^x + 3x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln \lambda = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + 3x)}{x}, \text{ el límit és una indeterminació de la forma } \frac{0}{0}.$$

Aplicant la regla de l'Hôpital:

$$\ln \lambda = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + 3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e^x + 3x} (e^x + 3)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 3}{e^x + 3x} = 4.$$

Aleshores, $\lambda = e^4$.

72.- Determineu en cadascun dels casos, les equacions de les corbes que verifiquen les condicions:

- a) El pendent de la tangent en un punt qualsevol (x, y) és la meitat del pendent de la recta que uneix aquest punt amb l'origen.
 - b) La normal en cada punt, la recta que uneix aquest punt amb l'origen i l'eix OX formen un triangle isòsceles que té en l'eix OX el costat desigual.
 - c) El segment de la normal traçada a qualsevol punt (x, y) que té extrems aquest punt i la seua intersecció amb OX es dividit en dues parts iguals per l'eix OY.
- Oposicions Càceres 2002.

Solució:

a)

El pendent de la recta tangent és la derivada de la funció en el punt.

El pendent de la recta que passa per un punt (x, y) i l'origen de coordenades és $\frac{y}{x}$.

Aleshores:

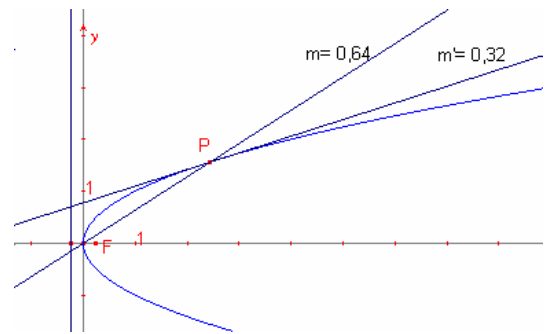
$y' = \frac{1}{2} \frac{y}{x}$, és una equació diferencial de variables separables:

$$\frac{1}{y} dy - \frac{1}{2x} dx = 0$$

Integrant:

$$\ln|y| - \frac{1}{2} \ln|x| = C, \quad \left| \frac{y}{\sqrt{x}} \right| = C$$

$y^2 = ax$, és una paràbola.



b)

El pendent de la recta normal és $-\frac{1}{y'}$.

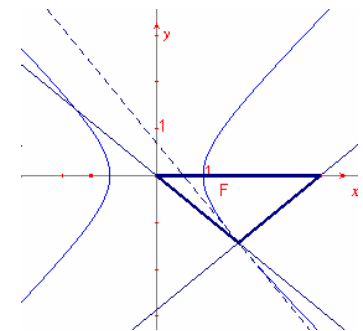
Per formar un triangle isòsceles les tangents han de ser oposades. Aleshores:

$\frac{-1}{y'} = -\frac{y}{x}$, és una equació diferencial de variables separables:

$$y dy - x dx = 0.$$

Integrant:

$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = C \text{ que és l'equació d'una hipèrbola.}$$



c)

Si l'eix OY divideix en dues parts iguals el segment la tangent és

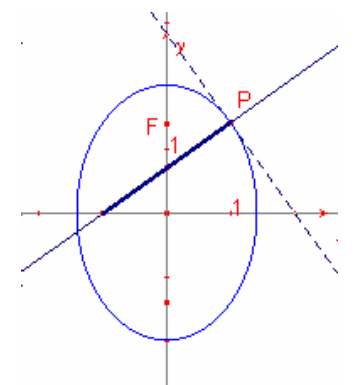
$\frac{y}{2x}$, aleshores:

$\frac{-1}{y'} = \frac{y}{2x}$, és una equació diferencial de variables separables:

$$y dy + 2x dx = 0$$

Integrant:

$$\frac{y^2}{2} + x^2 = C \text{ que és l'equació d'una el·lipse.}$$



73.- Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $y = 3x^4 - 4x^3$ en dos punts distints.

Solució:

Siga $y = ax + b$ la recta tangent que cerquem.

El sistema $\begin{cases} y = 3x^4 - 4x^3 \\ y = ax + b \end{cases}$ ha de tenir dues úniques solucions reals

Aleshores, l'equació $3x^4 - 4x^3 - ax - b = 0$ ha de tenir dues solucions reals dobles, és a dir, $3x^4 - 4x^3 - ax - b$ és un quadrat perfecte d'un polinomi de segon grau amb arrels reals distintes.

$$3x^4 - 4x^3 - ax - b = (cx^2 + dx + e)^2.$$

Desenvolupant:

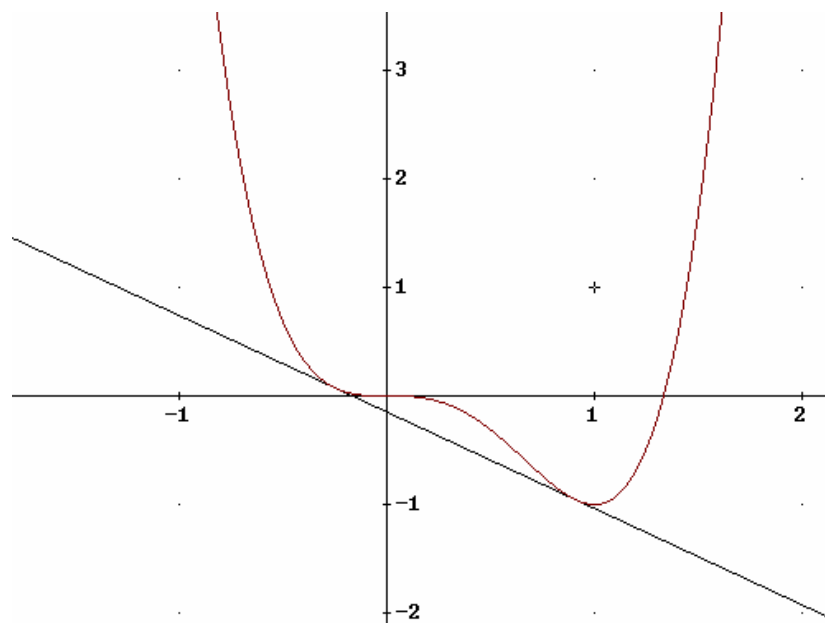
$$3x^4 - 4x^3 - ax - b = c^2x^4 + 2cdx^3 + (2ce + d^2)x^2 + 2dex + e^2.$$

Igualant coeficient:

$$\begin{cases} c^2 = 3 \\ 2cd = -4 \\ 2ce + d^2 = 0. \\ 2de = -a \\ e^2 = -b \end{cases} \quad \begin{cases} c^2 = 3 \\ d = -2\frac{1}{c} \\ e = -2\frac{1}{c^3} \\ a = -2de = -2\left(-2\frac{1}{c}\right)\left(-2\frac{1}{c^3}\right) = -8\frac{1}{c^4} = \frac{-8}{9} \\ b = -e^2 = -\left(-2\frac{1}{c^3}\right)^2 = -\frac{4}{c^6} = -\frac{4}{27} \end{cases}$$

Aleshores la recta tangent és:

$$y = \frac{-8}{9}x + \frac{-4}{27}.$$



74.- Calculeu la integral $\int_{-1}^1 \frac{x^{2n}}{1+e^x} dx$.

Solució:

Notem que per substitució:

$$\int_{-1}^1 \frac{x^{2n}}{1+e^x} dx = \int_1^{-1} \frac{t^{2n}}{1+e^{-t}} (-1) dt = \int_{-1}^1 \frac{t^{2n}}{1+e^{-t}} dt = \int_{-1}^1 \frac{x^{2n}}{1+e^{-x}} dx.$$

$x = -t$
$dx = -dt$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{x^{2n}}{1+e^x} dx &= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 \frac{x^{2n}}{1+e^x} dx + \int_{-1}^1 \frac{x^{2n}}{1+e^{-x}} dx \right) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(x^{2n} \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^{-x}} \right) \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^{2n} dx = \int_0^1 x^{2n} dx = \left. \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right|_0^1 = \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

75.- Siga $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ una funció tal que $f(x) \cdot f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $x, y > 0$.

a) Calculeu $f(1)$.

b) Calculeu $f(x)$.

Solució:

a)

$$\text{Si } x = y = 1, [f(1)]^2 - f(1) = 2.$$

Resolent l'equació, obtenim:

$f(1) = 2$, o bé, $f(1) = -1$, aquest darrer valor no compleix la hipòtesi de l'enunciat, la imatge ha de ser positiva.

Per tant la solució és $f(1) = 2$.

b)

$$\text{Si } y = 1$$

$$f(x) \cdot f(1) - f(x) = \frac{x}{1} + \frac{1}{x}.$$

$$2 \cdot f(x) - f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Aleshores:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

76.- Calculeu l'àrea limitada per la gràfica de la funció $f(x) = e^{-x} \sin x$ i el semieix positiu OX.
Oposicions Eivissa 2002.

Solució:

$$f(x) = 0 \text{ quan } x = k\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$f(x) > 0, \text{ quan } \bigcup_{k=1}^{\infty}]2k\pi, (2k+1)\pi[.$$

$$f(x) < 0, \text{ quan } \bigcup_{k=1}^{\infty}](2k+1)\pi, 2k\pi[.$$

$$\text{Calculem } I = \int e^{-x} \sin x dx$$

Per parts:

$$I = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx = -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - I.$$

$\begin{aligned} u &= \sin x & du &= \cos x dx \\ dv &= e^{-x} dx & v &= -e^{-x} \end{aligned}$

$\begin{aligned} u &= \cos x & du &= -\sin x dx \\ dv &= e^{-x} dx & v &= -e^{-x} \end{aligned}$
--

Aleshores:

$$2I = -e^{-x} (\sin x + \cos x)$$

$$I = \frac{-e^{-x} (\sin x + \cos x)}{2}.$$

l'àrea limitada per la gràfica de la funció $f(x) = e^{-x} \sin x$ i el semieix positiu OX és:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx - \sum_{k=0}^{\infty} \int_{(2k+1)\pi}^{2k\pi} e^{-x} \sin x dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-(2k+1)\pi} + e^{-2k\pi}}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-e^{-2k\pi} - e^{-(2k+1)\pi}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\pi} = \frac{1}{2} + \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\pi} - 1} = \frac{e^{\pi} + 1}{2(e^{\pi} - 1)} \end{aligned}$$

77.- Demostreu que per a tot $x \in \mathbb{R}^+$, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.

Oposicions Eivissa 2002.

Solució:

Siga $f(x) = \ln(1+x) - x$, $x \in \mathbb{R}^+$

La funció és contínua i derivable en $x \in \mathbb{R}^+$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

$f'(x) < 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}^+$, aleshores, la funció $f(x)$ és estrictament decreixent en $x \in \mathbb{R}^+$

$f(0) > f(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}^+$

$$f(0) = 0$$

Aleshores, $f(x) < 0$, per a tot $x \in \mathbb{R}^+$

Per tant, $\ln(1+x) - x < 0$, $\ln(1+x) < x$, per a tot $x \in \mathbb{R}^+$.

Siga $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}^+$

La funció és contínua i derivable en $x \in \mathbb{R}^+$.

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}.$$

$g'(x) > 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}^+$, aleshores, la funció $g(x)$ és estrictament creixent en $x \in \mathbb{R}^+$.

$g(0) < g(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}^+$

$$g(0) = 0$$

Aleshores, $g(x) > 0$, per a tot $x \in \mathbb{R}^+$

Per tant, $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0$, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$, per a tot $x \in \mathbb{R}^+$.

78.- Calculeu $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{p}{n^2}\right)$.

Oposicions Eivissa 2002.

Solució:

$$\text{Siga } \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{p}{n^2}\right)$$

$$\begin{aligned} \ln \lambda &= \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{p}{n^2}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n n \cdot \ln \left(1 + \frac{p}{n^2}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \ln \left(1 + \frac{p}{n^2}\right)^n \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{p}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2}{p}}\right)^{n \cdot \frac{p}{n^2}} = \ln e^{\frac{p}{n}} = \frac{p}{n}.$$

$$\ln \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \ln \left(1 + \frac{p}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^n \frac{p}{n} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

$$\lambda = e^{\frac{1}{2}}.$$

79.- Calculeu el següent límit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \dots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \right)$$

Oposicions Castella-Lleó 2004.

Solució:

Aplicarem el criteri d'Stolz:

Si $\{b_n\}$ és creixent, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = (L, -\infty, +\infty)$,

aleshores, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = (L, -\infty, +\infty)$

Siga, $a_n = \left(\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \dots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \right)$, $b_n = n^2$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^n}{n^n}}{2 - \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{e}{2}.$$

Aplicant el criteri:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \dots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \right) = \frac{e}{2}.$$

80.- Justifiqueu si existeix alguna funció $f(x)$ derivable en tots els reals amb $|f(x)| < 2$ per a tots els reals i que compleisca $f(x) \cdot f'(x) \geq \sin x$.
Oposicions Madrid 2004.

Solució:

Ho farem per reducció a l'absurd.

Suposem que existesca la funció.

Siga $F(x) = f^2(x) + 2 \cos x + 2$.

$F'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 2 \sin x$.

Per hipòtesi, $F'(x) \geq 0$, aleshores la funció $F(x)$ és creixent.

Aleshores, $F(\pi) \geq F(0)$

$$F(\pi) = f^2(\pi) + 2 \cos \pi + 2 = f^2(\pi)$$

$$F(0) = f^2(0) + 2 \cos 0 + 2 = f^2(0) + 4$$

Aleshores, $f^2(\pi) \geq f^2(0) + 4 \geq 4$.

Aleshores, $|f(\pi)| \geq 2$, la qual cosa contradiu una hipòtesi.