81.- a) Determineu la longitud d'arc des de $\theta = 0$ fins $\theta = 2\pi$ corresponent a la cardioide $\rho = 3 - 3\cos\theta$.

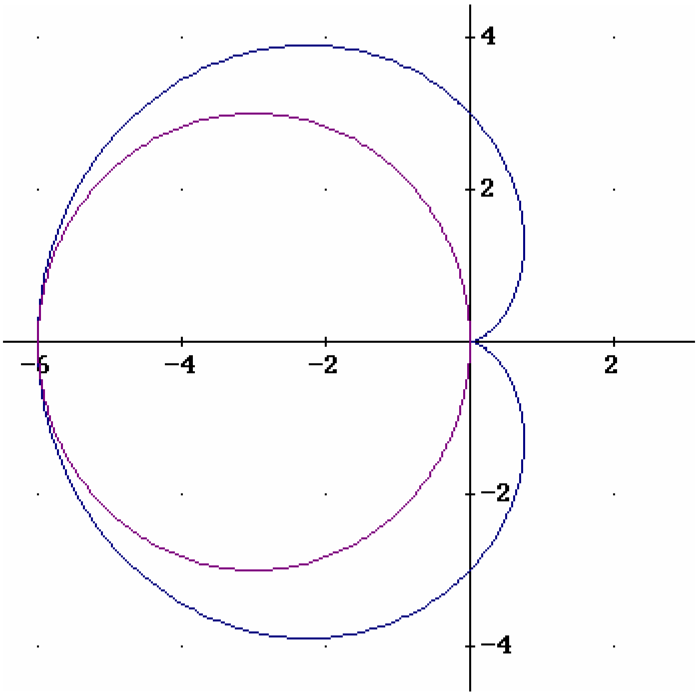
b) Determineu l'àrea de la regió comuna a les regions limitades per la cardiode anterior i per la circumferència $\rho = -6\cos\theta$.

Oposicions la Rioja 2006.

Solució:

a)

La longitud d'arc és.



$$2\left(\int_0^{\pi}\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\right) =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\sqrt{9(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)+9\sin^2\theta}\,d\theta =$$

$$= 2\sqrt{18}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta =$$

$$= 2\sqrt{18}\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\,d\theta =$$

$$= 12\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta =$$

$$= 12\cdot 2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta =$$

$$= 24\left(-\cos\frac{\theta}{2}\right)\Bigg]_0^{\pi} = 24.$$

b)

L'equació polar de la circumferència és $\rho = -6\cos\theta$, $\theta \in [0,\pi]$.

L'àrea és:

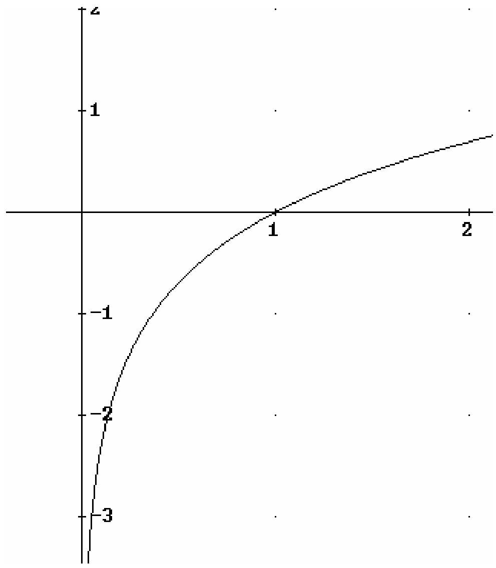
$$2\left(\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi}(3-3\cos\theta)^2\,d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-6\cos\phi)^2\,d\theta\right)\right) = \frac{9}{2}\pi.$$

82.- Siga la funció $f(x)=\ln x$.

a) Determineu la longitud d'arc de la corba entre $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$.

b) Determineu l'àrea de la corba afitada per l'eix OX i les rectes $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$.

Oposicions Andalusia 2006.



Solució:

La funció $y=\ln x$ és creixent en el seu domini $]0,+\infty[$

$f(1)=0$ és el seu únic punt de tall amb l'eix d'abscisses.

a) La longitud d'arc és:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx$$

$$\int\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx=$$

Efectuant el canvi $t^2=1+x^2$, $dx=\frac{t}{x}dt$

$$=\int\frac{t^2}{t^2-1}dt=\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=$$

$$=\int\left(1+\frac{\frac{-1}{2}}{t+1}+\frac{\frac{1}{2}}{t-1}\right)dt=t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|+C.$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\left(\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|\right)\Bigg]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{\sqrt{13}-4}{\sqrt{13}+4}\right|\right)-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}+4}\right|\right).$$

b) L'àrea afitada per la corba és:

$$-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln x\,dx+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\ln x\,dx.$$

Integrant per parts, $\int\ln x\,dx=x(-1+\ln x)+C$.

$$-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln x\,dx+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\ln x\,dx=-\left(x(-1+\ln(x))\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\left(x(-1+\ln(x))\right]_{1}^{\frac{3}{2}}=\ln\sqrt{\frac{27}{16}}.$$

83.- Calculeu l'àrea limitada pel bucle de la corba $y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)=0$.
Oposicions de Galícia 2006.

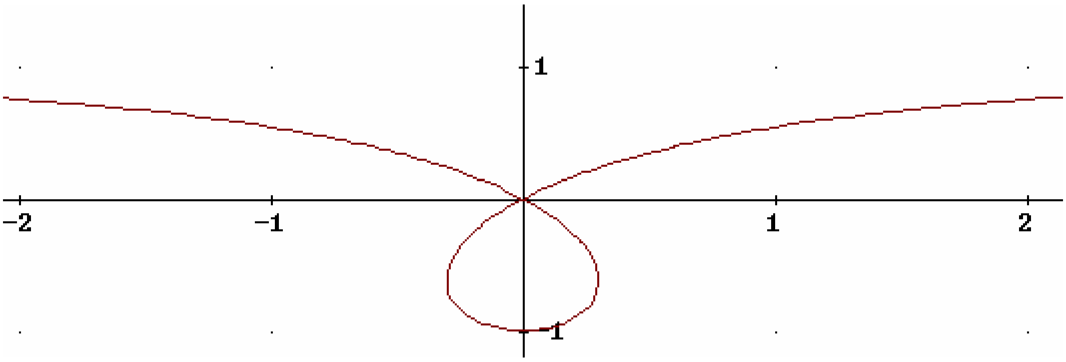
Solució:
La corba és l'esferoide.
Determinem la seua equació en forma polar:

Siga $\begin{cases} x = ? \cdot \cos ? \\ y = ? \cdot \sin ? \end{cases}$. Substituint en l'equació:

$?^3 \sin ? - ?^2 \cos 2?$

Simplificant:

$? = \dfrac{\cos 2?}{\sin ?}$, $\theta \in [0, \pi]$



El bucle el recorre quan $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

L'àrea és:

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \rho^2 d\theta$$

$$\rho^2 = \frac{\cos^2 2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{(1-2\sin^2\theta)^2}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} - 4\cos^2\theta$$

$$\int \rho^2 d\theta = \int \frac{1}{\sin^2\theta} - 4\cos^2\theta \, d\theta = -\mathrm{ctg}\theta - 2\theta - \sin 2\theta$$

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{ctg}\theta - 2\theta - \sin 2\theta\right)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{2}(4-\pi).$$

84.- Es defineix la funció periòdica de període 1, que en $[0,1[$ ve definida per $f(x)=2x^3+bx^2+cx$. Estudieu la seua derivabilitat.
Oposicions Astúries 2006.

Solució:
Determinem b i c:
$f(0)=0$, aleshores, $f(1)=f(2)=f(0)=0$
Si $f(1)=0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(2(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)\right)=0$
A fi que la funció siga contínua en $x=1$:
$2+b+c=0$.

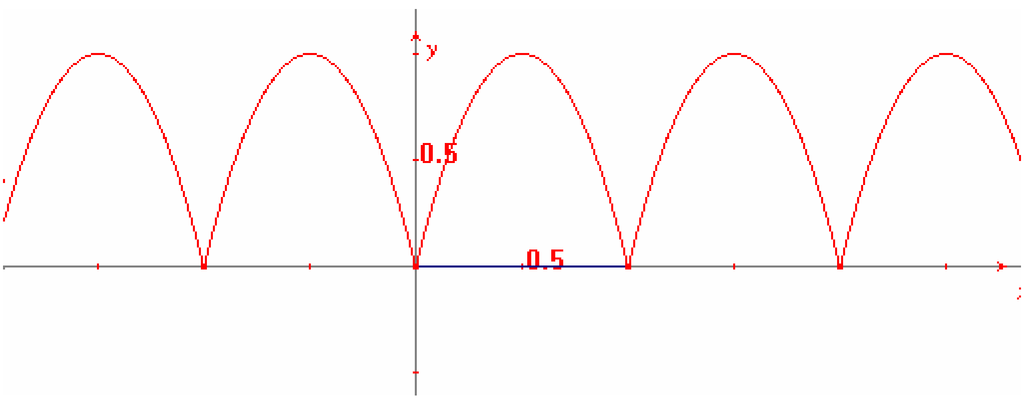
Si $f(2)=0$
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(2x^3+bx^2+cx\right)=16+4b+2c$.
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(2(x-2)^3+b(x-1)^2+c(x-1)\right)=0$
A fi que la funció siga contínua en $x=2$:
$16+4b+2c=0$.

Resolent el sistema:
$\begin{cases} b+c=-2 \\ 2b+c=-8 \end{cases}$, $\begin{cases} b=-6 \\ c=4 \end{cases}$, en aquest cas la funció és contínua en $x=1,2$
Podem definir la funció:
$f(x)=\left\{2(x-n)^3-6(x-n)^2+4(n-x)\,/\,x\in[n,n+1[,\quad n\in Z\right\}$
La funció és contínua en R.
La funció és derivable en $R-Z$ per ser una funció polinòmica.
Siga $n\in Z$.

$$f'_{n^+}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(n+h)-f(n)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h^3-6h^2+4h}{h}=4.$$

$$f'_{n^-}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(n+h)-f(n)}{h}=\lim_{h\to 0^{-+}}\frac{2(h+1)^3-6(h+1)^2+4(h+1)}{h}=-2.$$

Aleshores la funció no és derivable quan $n\in Z$.



85.- Calculeu la integral $\int \frac{\left(1-\sqrt{1+x+x^2}\right)^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

Oposicions Galícia 2006.

Solució:

Efectuem el canvi $\sqrt{1+x+x^2}=x+t$.

$x=\frac{t^2-1}{1-2t}$, $dx=\frac{2(-t^2+t-1)}{(1-2t)^2}dt$.

Efectuant el canvi:

$$\int \frac{\left(1-\sqrt{1+x+x^2}\right)^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx=\int \frac{(1-x+t)^2}{x^2(x+t)}\frac{2(-t^2+t-1}{(1-2t)^2}dt=$$

$$=\int \frac{\left(1-\frac{t^2-1}{1-2t}-t\right)^2}{\left(\frac{t^2-1}{1-2t}\right)^2\left(\frac{t^2-1}{1-2t}-t\right)}\frac{2(-t^2+t-1)}{(1-2t)^2}dt=$$

$$=\int \frac{(t^2-3t+2)^2 2(-t^2+t-1)}{\frac{(t^2-1)^2(-t^2+t-1)}{(1-2t)^3}}dt=$$

$$=\int \frac{2(t-2)^2}{(t+1)^2(1-2t)}dt=$$

Calculant la integral racional:

$$=-\ln|2t-1|-\frac{6}{t+1}+C=$$

Desfent el canvi:

$$=-\ln\left|2\left(\sqrt{1+x+x^2}-x\right)-1\right|-\frac{6}{\sqrt{1+x+x^2}-x+1}+C.$$

86.- Siga $f(x)$ una funció que admet derivades fins l'ordre 3. Calculeu:

$$E = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^4}\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x+h) \\ 1 & f(x+h) & f(x+2h) \\ 1 & f(x+2h) & f(x+3h) \end{vmatrix}.$$ Oposicions Galícia 2006.

Solució:

Restant a la 2ª la 1ª i a la fila 3ª fila la 2ª:

$$E = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^4}\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x+h) \\ 1 & f(x+h) & f(x+2h) \\ 1 & f(x+2h) & f(x+3h) \end{vmatrix} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^4}\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x+h) \\ 0 & f(x+h)-f(x) & f(x+2h)-f(x+h) \\ 0 & f(x+2h)-f(x+h) & f(x+3h)-f(x+2h) \end{vmatrix} =$$

Dividint la 2ª i 3ª fila per h:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x+h) \\ 0 & \frac{f(x+h)-f(x)}{h} & \frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h} \\ 0 & \frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h} & \frac{f(x+3h)-f(x+2h)}{h} \end{vmatrix} =$$

Calculant límits:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x+h) \\ 0 & f'(x) & f'(x+h) \\ 0 & f'(x+h) & f'(x+2h) \end{vmatrix} =$$

Restant a la 3ª fila la segona:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x+h) \\ 0 & f'(x) & f'(x+h) \\ 0 & f'(x+h)-f'(x) & f'(x+2h)-f'(x+h) \end{vmatrix} =$$

Dividint la 3ª fila per h:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x+h) \\ 0 & f'(x) & f'(x+h) \\ 0 & \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} & \frac{f'(x+2h)-f'(x+h)}{h} \end{vmatrix} =$$

Calculant límits:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x+h) \\ 0 & f'(x) & f'(x+h) \\ 0 & f''(x) & f''(x+h) \end{vmatrix} =$$

Restant a la 3ª columna la 2ª:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x+h)-f(x) \\ 0 & f'(x) & f'(x+h)-f'(x) \\ 0 & f''(x) & f''(x+h)-f''(x) \end{vmatrix} =$$

Dividint la 3ª columna per h:

$$= \lim_{h\to 0} \begin{vmatrix} 1 & f(x) & \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ 0 & f'(x) & \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} \\ 0 & f''(x) & \frac{f''(x+h)-f''(x)}{h} \end{vmatrix} =$$

Calculant límits:

$$= \lim_{h\to 0}\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f'(x) \\ 0 & f'(x) & f''(x) \\ 0 & f''(x) & f'''(x) \end{vmatrix} = f'(x)\cdot f'''(x) - \left(f''(x)\right)^2 .$$

87.- Determineu la condició necessària i suficient que ha de complir la base a d'un sistema de logaritmes a fi que en aquest sistema existesca, almenys un nombre igual al seu logaritme.
Oposicions Castella la Manxa 2006.

Solució:
Per a ser una base de logaritmes $a>0$, $a\neq 1$.
Considerem la funció:

$$f(x)=\log_a(x)-x=\frac{\ln x}{\ln a}-x.$$

El domini d'aquest funció $f(x)$ és $\left]0,+\infty\right[$. És contínua i derivable en el seu domini:

$$f'(x)=\frac{1}{x\cdot\ln a}-1. \quad f''(x)=\frac{-1}{x^2\cdot\ln a}.$$

Suposem $0<a<1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Notem que en el seu domini $f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}-1<0$. La funció és decreixent.

Aleshores existeix un únic punt x tal que $f(x)=0$, és a dir:

$\log_a(x)=x$.

Suposem $a>1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

$f'(x)=0$

$$\frac{1}{x\cdot\ln a}=1, \quad x=\frac{1}{\ln a}\in\left]0,+\infty\right[. \quad f''\left(\frac{1}{\ln a}\right)=-\ln a<0$$

Aleshores, $x=\dfrac{1}{\ln a}$ és el màxim de la funció.

La funció és creixent en $\left]0,\dfrac{1}{\ln a}\right[$, i és decreixent en $\left]\dfrac{1}{\ln a},+\infty\right[$.

$$f\left(\frac{1}{\ln a}\right)=\frac{-\ln(\ln a)-1}{\ln a}.$$

$\ln(\ln a)=-1$ si i només si $a=e^{e^{-1}}$

Si $a=e^{e^{-1}}$ la funció $f(x)$ té un únic punt $x=e$ tal que $f(x)=0$.

Si $a>e^{e^{-1}}$, aleshores $f\left(\dfrac{1}{\ln a}\right)=\dfrac{-\ln(\ln a)-1}{\ln a}<0$. Aleshores la funció $f(x)$ és definida negativa, aleshores no té punts de tall.

Si $1<a<e^{e^{-1}}$, aleshores $f\left(\dfrac{1}{\ln a}\right)=\dfrac{-\ln(\ln a)-1}{\ln a}>0$. Aleshores la funció $f(x)$ té 2 punts de tall. Aleshores tindria dues solucions.

88.- Si $f:[-1,1]\to R$ és una funció parella i contínua i si a és un nombre real positiu $a\neq 1$, proveu que $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{a^x+1}dx=\int_0^1 f(x)dx$.

Calculeu $\int_{-1}^{1}\frac{e^x-1}{(1+e^x)(x^2+1)}dx$ Oposicions Balears 2006.

Solució:

Per ser parella $f(x)=f(-x)$. Per substitució:

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+a^x}dx=\int_{1}^{-1}\frac{f(-t)}{1+a^{-t}}(-1)dt=\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{1+a^{-t}}dt=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+a^{-x}}dx.$$

$$\boxed{\begin{array}{l}x=-t\\ dx=-dt\end{array}}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+a^x}dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+a^x}dx+\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+a^{-x}}dx\right)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(f(x)\left(\frac{1}{1+a^x}+\frac{1}{1+a^{-x}}\right)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)dx=\frac{1}{2}2\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx.$$

$$\frac{e^x-1}{(1+e^x)(x^2+1)}=\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{-x^2}{x^2+1}+\frac{x^2-1}{(1+e^x)(x^2+1)}$$

$$\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=\ln\left|1+e^x\right|+C$$

$$\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=x-\text{arctg}x+C$$

$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ és una funció contínua i parella $x\in[-1,1]$

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2-1}{(1+e^x)(x^2+1)}dx=\int_0^1\frac{x^2-1}{x^2+1}dx$$

$$\int\frac{x^2-1}{x^2+1}dx=\int\left(1+\frac{-2}{1+x^2}\right)dx=x-2\text{arctg}(x)+C.$$

Aleshores:

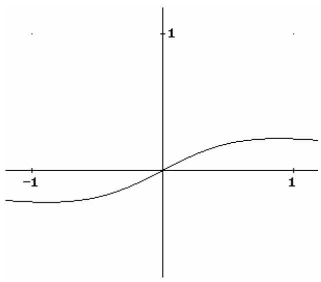
$$\int_{-1}^{1}\frac{e^x-1}{(1+e^x)(x^2+1)}dx=\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{1+e^x}dx+\int_{-1}^{1}\frac{-x^2}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{x^2-1}{(1+e^x)(x^2+1)}dx=$$

$$=\left(\ln\left|1+e^x\right|\right)\Big]_{-1}^{1}+\left(-x+\text{arctg}(x)\right)\Big]_{-1}^{1}+\left(x-2\text{arctgx}(x)\right)\Big]_0^1=$$

$$=\left(\ln(1+e)-\ln(1+e^{-1})\right)+\left(-1+\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right)+\left(1-2\frac{\pi}{4}-0\right)=0.$$

També s'hauria pogut fer demostrant que la funció

$g(x)=\frac{e^x-1}{(1+e^x)(x^2+1)}$ és imparella i aleshores $\int_{-1}^{1}g(x)dx=0$.



$$g(-x)=\frac{e^{-x}-1}{(1+e^{-x})((-x)^2+1)}=\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\left(1+\frac{1}{e^x}\right)(x^2+1)}=\frac{1-e^{-x}}{(1+e^{-x})(x^2+1)}=-g(x).$$

89.- Siga $f:[0,1]\to R$ una funció contínua en el tancat $[0,1]$ i derivable en el obert $]0,1[$ amb $f(0)=0$ i $f(1)=1$. Demostreu que per a tot nombre natural $n\geq 1$ es verifica que existeixen n nombres naturals q_i, amb $0<q_1<q_2<.....<q_n<1$ tals que:

$$n=\sum_{i=1}^{n} f'(q_i).$$

Oposicions Múrcia 2006.

Solució:

Dividim l'interval $[0,1]$ en n intervals disjunts, $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$, $i=1,2,....,n$.

La funció f(x) és continua en $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$ i derivable en $\left]\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right[$ aleshores compleix les hipòtesis del teorema de Lagrange, per tant:

$\exists q_i \in \left]\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right[$ tal que $\dfrac{f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i-1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=f'(q_i)$

Notem que $0<q_1<q_2<.....<q_n<1$.

$$n\left(f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)=f'(q_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} n\left(f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)=\sum_{i=1}^{n} f'(q_i)$$

$$n(f(1)-f(0))=\sum_{i=1}^{n} f'(q_i)$$

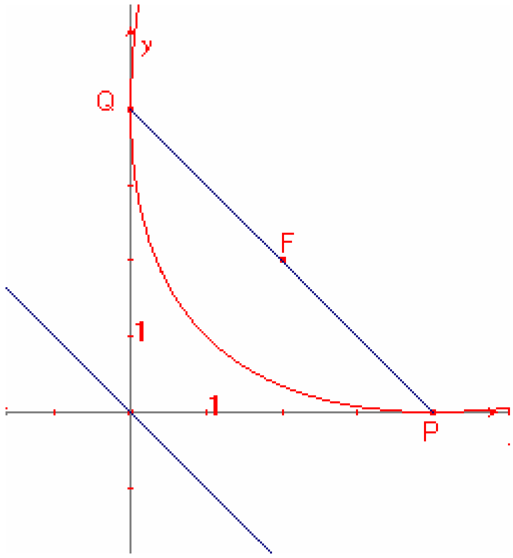
$$n=\sum_{i=1}^{n} f'(q_i).$$

90.- Una paràbola te el focus en el punt $F(2,2)$ i les tangent a 0X en el punt $P(4,0)$ i a OY en el punt $Q(0,4)$. Calculeu el volum engendrat pel segment parabòlic determinat per dita paràbola i la corda $\overline{PQ}$ al girar al voltant del l'eix OX.
Oposicions Andalusia 2000.

Solució:
$d(P,F) = d(Q,F) = \sqrt{8}$.
Aleshores els punts P i Q són simètrics respecte de l'eix de simetria de la paràbola.
El eix de simetria de la paràbola és perpendicular a la directriu de la paràbola.
El pendent de la recta que passa pels punts P, Q és -1.
La recta que passa pels punts P i Q té equació:
$y = -x + 4$.
Aleshores el pendent de la directriu és -1.
La recta directriu té equació:
$r \equiv y = -x + n$
Determinem n:
$d(P,F) = d(P,r)$

$\sqrt{8} = \left|\frac{2+2-n}{\sqrt{2}}\right|$. Elevant al quadrat i simplificant:

$n^2 - 8n = 0$. La solució de l'equació és $n = 0, 8$
Si $n = 8$ els eixos de coordenades serien secants a la paràbola.
Aleshores, $n = 0$.



Determinem l'equació de la paràbola:
Siga $M(x,y)$ un punt qualsevol de la paràbola, $d(M,F) = d(M,r)$:

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right|$ elevant al quadrat:

$x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0$.
Aïllant la incògnita y:
$y = x + 4 \pm 4\sqrt{x}$.

La part de l'arc de paràbola que pertany a la zona afitada pel segment $\overline{PQ}$ és:
$y = x + 4 - 4\sqrt{x}$, $x \in [0,4]$
el volum engendrat pel segment parabòlic determinat per dita paràbola i la corda $\overline{PQ}$ al girar al voltant del l'eix OX és el volum de revolució de la recta $y = -x + 4$ menys el volum de revolució de la paràbola $y = x + 4 - 4\sqrt{x}$, en l'interval $x \in [0,4]$

$$V = \pi\int_0^4 (-x+4)^2 dx - \pi\int_0^4 \left(x + 4 - 4\sqrt{x}\right)^2 dx = \frac{256}{15}\pi .$$