1. Determineu les longituds dels costats de tots els triangles rectangles amb costats de longitud entera, als quals es pot inscriure un cercle de radi 6.

Solució:

Sigui ABC un triangle que compleix les condicions del problema. Siguin a la hipotenusa i b i c els catets.

Els punts de tangència de le circumferència amb els catets b i c els divideixen, respectivament, en segments de longitud 6 i $b-6$, i 6 i $c-6$. Però com que les tangents tirades a un cercle des d'un punt són iguals, la hipotenusa a queda dividida pel punt de tangència amb la circumferència en segments de longitud $b-6$ i $c-6$. Això i el teorema de **Pitàgoras** donen les equacions:

$$a = b + c - 12$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Tenim:

$$(b + c - 12)^2 = b^2 + 2bc - 24b + c^2 - 24c + 144 = b^2 + c^2$$

o sigui

$$bc - 12b - 12c + 72 = 0$$

i, després d'algunes manipulacions,

$$b = 12 + \frac{72}{c-12}$$

Si c és enter, b ho és (i també a) si $c - 12|72$. Com que la construcció geomètrica obliga a que $c > 12$ i els divisors positius de 72 són

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72$$

obtenim els possibles valors de c:

$$13, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 30, 36, 48, 84$$

Els triangles que compleixen la condició tenen, doncs, costats de longituds:

$$[85, 84, 13], \quad [50, 48, 14], \quad [39, 36, 15]$$

$$[34, 30, 16], \quad [30, 24, 18], \quad [29, 21, 20]$$

2.-
a) Demostreu que el nombre de cares d'un políedre convex que tenen un nombre imparell de costats és parell.
b) Demostreu que la suma dels angles de totes les cares d'un políedre convex és $n \cdot 360^o$ amb n enter.

Solució:

a) Si a_R és el nombre de cares amb R costats i el nombre d'arestes del políedre és A, es té:

$$2A = 3a_3 + 4a_4 + \ldots + na_n$$

que, mòdul 2, dóna:

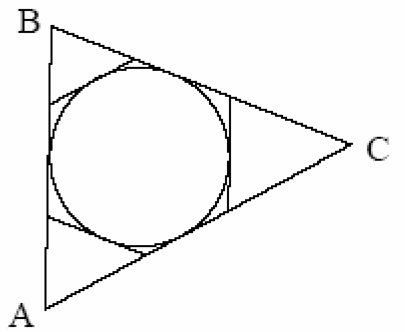
$$0 \equiv a_3 + a_5 + a_7 + \ldots$$

b) La suma dels angles és

$$S = 180^\circ \cdot (a_3 + 2a_4 + \ldots + (n-2)a_n)$$

i, pel que hem vist a *a)*, el nombre entre parèntesis és parell

3.- En un triangle, el radi de la circumferència circumscrita és R. Es tracen tres rectes tangents a la circumferència inscrita i paral·leles als costats, que formen tres triangles més petits en els vèrtex del triangle com es veu a la figura.



Si els radis de les circumferències circumscrites dels tres triangles petits són R_A, R_B, R_C, demostreu que $R = R_A + R_B + R_C$

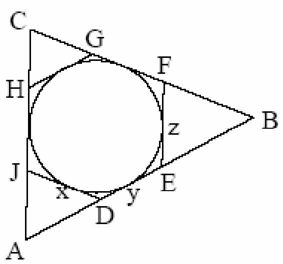
Solució:

- (Veure figura) $DX = DY$, $EY = EZ$, etc, de manera que obrint els costats interiors dels triangles petits recobrim tot el perímetre del gros, d'on $p(ADJ) + p(BEF) + p(CGH) = p(ABC) =: p$. Com que

$$\begin{array}{lll} \triangle ADJ \sim \triangle ABC & \text{amb raó de semblança} & r_1, \\ \triangle EBF \sim \triangle ABC & \text{amb raó de semblança} & r_2, \\ \triangle HGC \sim \triangle ABC & \text{amb raó de semblança} & r_3, \end{array}$$

tenim

$$\begin{aligned} r_1 p + r_2 p + r_3 p = p &\Longrightarrow r_1 + r_2 + r_3 = 1 \\ &\Longrightarrow r_1 R + r_2 R + r_3 R = R \\ &\Longrightarrow R_A + R_B + R_C = R. \end{aligned}$$



4.- Un tetràedre compleix que, per a cada vèrtex, la suma dels cosinus dels angles díedres de les tres arestes adjacents és 1. Demostreu que els díedres d'arestes oposades són iguals.

Solució:

–Sigui α_{ik} l'angle diedre de l'aresta A_iA_k $(\alpha_{ik} = \alpha_{ki})$ i $x_{ik} = \cos\alpha_{ik}$. Tenim

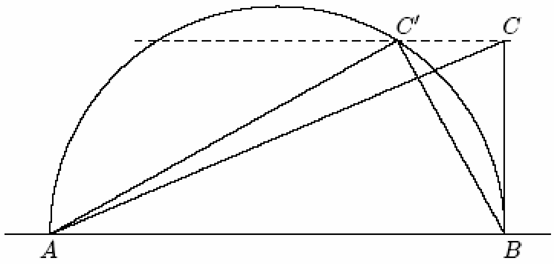
$$\left.\begin{array}{rcl} x_{12} + x_{13} + x_{14} & = & 1 \\ x_{12} + x_{23} + x_{24} & = & 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{34} & = & 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} & = & 1 \end{array}\right\} .$$

Sumant, $2(x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{34}) = 4$, i d'aquí $x_{23} + x_{24} + x_{34} = 1$. Que junt amb $x_{12} + x_{23} + x_{24} = 1$ dóna $x_{12} = x_{34}$, amb $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1$ dóna $x_{14} = x_{23}$ i amb $x_{13} + x_{23} + x_{34} = 1$ dóna $x_{13} = x_{24}$. D'on resulta $\alpha_{12} = \alpha_{34}$, $\alpha_{14} = \alpha_{23}$ i $\alpha_{13} = \alpha_{24}$.

5.- Hi ha dos triangles rectangles no semblants, cada un dels quals té un costat igual al costat d'un triangle equilàter i l'àrea α vegades l'àrea d'aquest triangle equilàter. Què podem dir del nombre α.

Solució:

En aquestes condicions hi ha d'haver un triangle amb un catet igual al costat del triangle equilàter i un triangle amb la hipotenusa igual al costat del triangle equilàter.



Si el triangle equilàter té costat ℓ i $AB = \ell$, aleshores $BC = \alpha\sqrt{3}\ell/2$ i perquè existeixi C' ha de ser

$$\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\ell \leq \frac{\ell}{2} \quad \text{o sigui} \quad \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

És clar que els triangles ABC i ABC' no són semblants.

6.- Un dipòsit cònic amb el vèrtex a la part inferior, d'altura h i angle en el vèrtex $2\alpha < \pi$, és ple d'aigua fins a vessar. S'introdueix al dipòsit, amb compte, una esfera de radi r més densa que l'aigua. Dibuixeu la gràfica de la funció que expressa, en funció de $r > 0$, el volum d'aigua que es vessarà. En particular, determineu el valor de r per al qual serà més gran el mullader.
Nota: El volum d'un casquet esfèric (cada una de les parts en què un pla divideix una esfera és igual a $\pi a^2\left(r - \frac{a}{3}\right)$ on r és el radi de l'esfera i a l'altura del casquet $(0 \le a \le 2r)$.

Solució:
Indicarem per $V(r)$ el volum d'aigua que es vessa en funció del radi r de l'esfera. Cal analitzar els diversos tipus de posicions que pot tenir l'esfera, en funció del radi r, quan està en contacte amb el recipient cònic.

Si el radi de l'esfera és prou petit (figura 1), aquesta quedarà totalment submergida en el recipient. Podem augmentar el radi mantenint aquesta situació, fins que l'esfera sigui tangent a la superfície de l'aigua. El radi corresponent s'anomenarà r_1.

$$\sin\alpha = \frac{r_1}{h - r_1} \quad \Longrightarrow \quad r_1 = h\frac{\sin\alpha}{1 + \sin\alpha}.$$

En aquest cas l'aigua vessada és el volum de l'esfera.

$$V(r) = V_1(r) = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad 0 \le r \le r_1.$$

Observem que es tracta d'una cúbica en r.

Si el radi és més gran que r_1, aleshores té una part que queda fora de l'aigua. Cal encara distingir dues situacions diferents: en la primera, l'esfera és tangent al recipient (figura 2), i en la segona, el radi ja és prou gran perquè l'esfera toqui la vora superior del dipòsit, però no tangencialment (figura 3). El radi r_2 frontera entre les dues situacions esmentades correspondrà a una esfera tangent al dipòsit, amb tangència justament a la vora superior.

$$r_2 = g\tan\alpha = \frac{h}{\cos\alpha}\tan\alpha = h\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Si el radi r de l'esfera està comprès entre r_1 i r_2, el volum de l'aigua vessada és el volum del casquet esfèric submergit. L'altura del casquet submergit és

$$a = a(r) = h - b = h - \left(\frac{r}{\sin\alpha} - r\right).$$

Així doncs, el volum d'aigua vessada serà

$$V(r) = V_2(r) = \pi(a(r))^2\left(r - \frac{a(r)}{3}\right)$$

si $r_1 < r \le r_2$.

El volum vessat finalment resulta

$$V_2(r) = \frac{\pi}{3}\left(h - \frac{r(1-\sin\alpha)}{\sin\alpha}\right)^2\left(\frac{r(1+2\sin\alpha)}{\sin\alpha} - h\right)$$

En aquest cas també es tracta d'una funció cúbica de r.

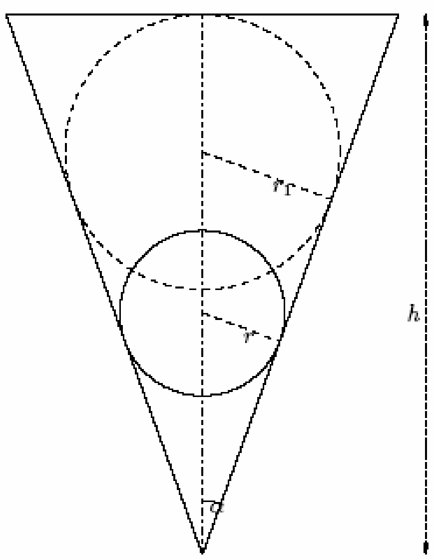


Fig.1.

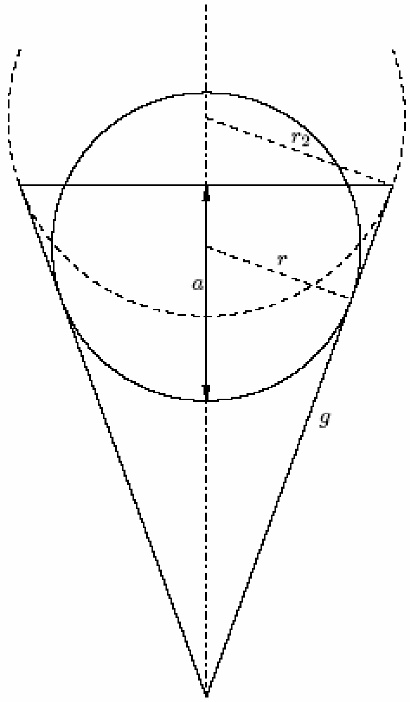


Fig.2.

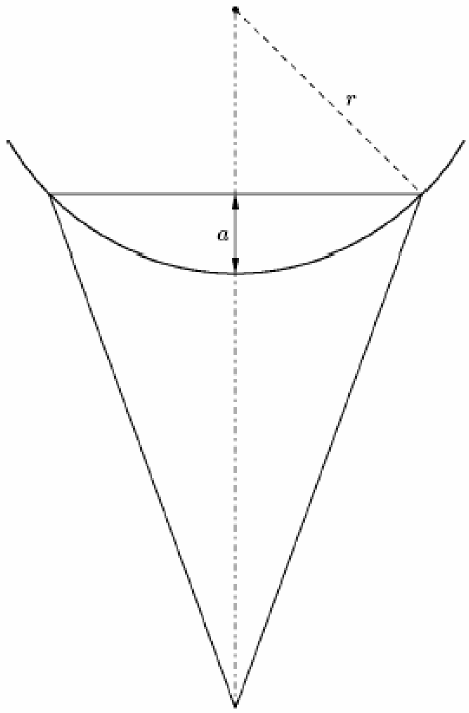


Fig.3.

Com hem dit abans, si $r > r_2$, l'esfera deixa de ser tangent al con i en aquest cas l'altura del casquet submergit és

$$\begin{aligned} a = a(r) &= r - \sqrt{r^2 - R^2} = \\ &= r - \sqrt{r^2 - h^2 \tan^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Per tant, el volum d'aigua vessada és

$$\begin{aligned} V(r) = V_3(r) &= \pi(a(r))^2 \Big(r - \frac{a(r)}{3}\Big) = \\ &= \frac{\pi}{3}\Big(r - \sqrt{r^2 - h^2 \tan^2 \alpha}\Big)^2 \Big(2r + \sqrt{r^2 - h^2 \tan^2 \alpha}\Big) \end{aligned}$$

La funció $V_3(r)$ ja no és una cúbica, com en els casos anteriors. El límit d'aquesta funció quan $r \to \infty$ és 0, cosa que es dedueix apel·lant a la intuïcio física, i també calculant directament a la fórmula. La funció $V(r)$ està definida en tres trams (figura 4), tal com hem dit.

Al primer, de 0 a r_1, $V_1(r)$ és creixent amb r. Al tercer, de r_2 a $+\infty$, $V_3(r)$ és decreixent amb r. Per tant, l'extrem, cas que hi sigui, només cal buscar-lo a l'interval $[r_1, r_2]$ on la funció és $V_2(r)$. Derivant l'expressió $V_2(r) = \pi(a(r))^2 \Big(r - \frac{a(r)}{3}\Big)$ resulta

$$V_2'(r) = \pi a(r) \Big[(2r - a(r))a'(r) + a(r)\Big]$$

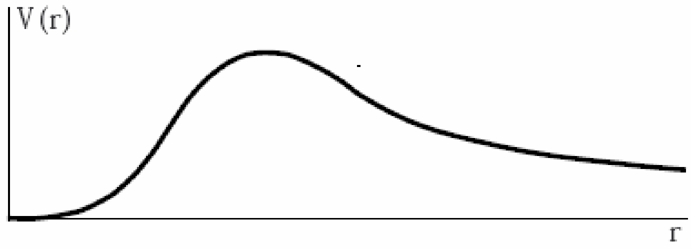
que s'anul·la si $a(r) = 0$, és a dir, si $r = h\frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha} > r_2$ i queda fora de l'interval $[r_1, r_2]$; o bé si

$$\begin{aligned} 0 &= (2r - a(r))a'(r) + a(r) = 2ra'(r) + (1 - a'(r)) = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha}\Big[r\Big(2 \sin \alpha - 1 - \frac{1}{\sin \alpha}\Big) + h\Big] \end{aligned}$$

és a dir, si

$$r = r_c = h\frac{\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)(1+2\sin\alpha)}.$$

Notem que $r_1 < r_c < r_2$ i que r_c és un punt de màxim perquè és el primer dels dos punts crítics d'una cúbica $V_2(r)$ amb el coeficient del terme de grau tres positiu.



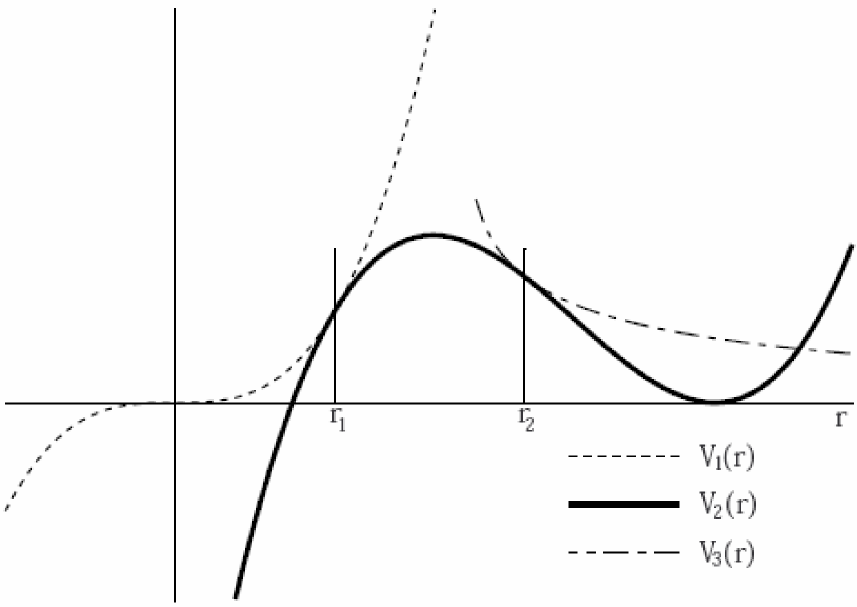


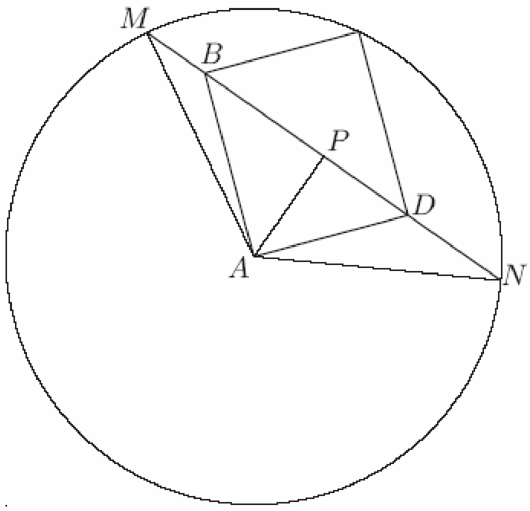
Fig.4.

7.- Un rectangle de costats 20cm i 15cm té un vèrtex situat en el centre d'un circumferència i el vèrtex oposat situat sobre la circumferència. Calculeu la longitud de la corda que passa pels altres dos vèrtex del rectangle.

Solució:

Posem $AD = 15$; $AB = 20$. Pel teorema de Pitàgores es dedueix de seguida que el radi del cercle és $AC = 25$.

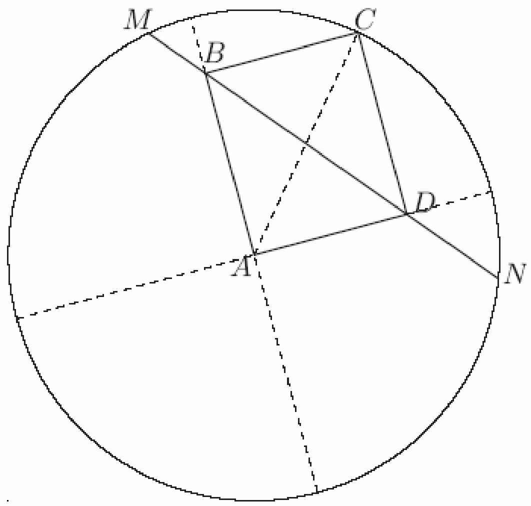
2.1.–*Solució 1:*



En el triangle rectangle BAD, el segment AP és l'altura sobre la hipotenusa, que fa 25 perquè és igual al radi del cercle. Calculant l'àrea del triangle ABD ens surt $PA \cdot BD = AD \cdot AB$, d'on $PA = 20 \cdot 15/25 = 12$. La meitat de la corda

buscada, PN, es pot calcular pel teorema de Pitàgores en el triangle rectangle PAN. Surt $PN = \sqrt{481}$ i obtenim que la corda $MN = 2\sqrt{481}$.

2.2.–*Solució 2:*



Posem $DN = x$, $MB = y$. Si calculem la potència del punt D respecte de la circumferència fent servir la corda MN i la que perllonga el costat AD, tindrem $y(x+25) = 10 \cdot 40$. Semblantment, per a la potència del punt B tindrem $y(x+25) = 4 \cdot 45$. Si resolem el sistema format per aquestes dues equacions trobem $x = \sqrt{481} - 9$; $y = \sqrt{481} - 16$, i d'aquí, $MN = x + y + 25 = 2\sqrt{481}$.

8.-
a) Demostreu que, en qualsevol triangle, el perímetre del triangle, P, l'àrea del triangle, A i el radi R del cercle inscrit satisfan, $RP = 2A$.
b) D'entre tots els triangles de base 1 i altura 1, determineu quin té el cercle inscrit d'àrea màxima i calculeu l'àrea d'aquest cercle.

Solució:

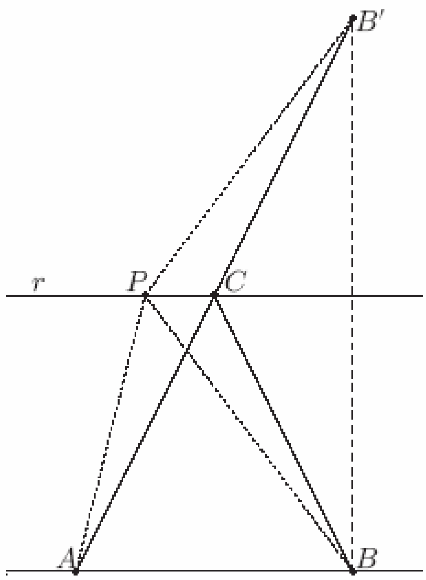
a) Si unim amb segments l'incentre del triangle a cadascun dels vèrtexs, es formen tres triangles. Tots ells tenen altura R i les seves bases respectives són les longituds dels costats del triangle, que anomenarem X, Y i Z. Per tant, l'àrea del triangle gran és igual a

$$A = \frac{1}{2} R \cdot X + \frac{1}{2} R \cdot Y + \frac{1}{2} R \cdot Z = \frac{1}{2} R \cdot P.$$

Aquest resultat es fa servir per resoldre la segona part del problema:

b) D'entre tots els triangles de base 1 i altura 1, el que té el cercle inscrit d'àrea màxima és el que té el radi R màxim, i per tant és el de perímetre mínim, ja que $R \cdot P = 2A = 1$.

El triangle de base 1 i altura 1 que té el perímetre mínim és l'isòsceles. En efecte, si A i B són els vèrtexs de la base i tracem la recta r paral·lela a distància 1, el tercer vèrtex estarà sobre r. Si B' és el simètric de B respecte de r, la suma de distàncies $PA + PB$ d'un punt P qualsevol de la recta als punts A i B és $PA + PB = PA + PB' \leq AB'$. Per tant el mínim s'assolirà al punt C d'intersecció del AB' amb la recta r. El triangle ABC resulta isòsceles.



Vist això, el perímetre del triangle isòsceles de base 1 i altura 1 és $1 + \sqrt{5}$. La relació $R \cdot P = 1$ ens dóna el radi R i resulta que l'àrea πR^2 del cercle és igual a

$$\frac{1}{8} \pi \left(3 - \sqrt{5}\right)$$

9.- Esbrineu per a quins punts de l’eix d’una paràbola es poden traçar el màxim nombre possible de normals a la paràbola. Comproveu que la distància d’aquests punts al vèrtex és més gran que la distància d’aquests punts als peus de les altres normals.

Solució:

Si $y = ax^2$ és la paràbola, consideri's un punt (x_0, ax_0^2) d'aquesta. La normal per aquest punt talla l'eix d'ordenades en el punt $(0, ax_0^2 + 1/2a)$. Així, doncs, pels punts $(0, y)$ amb $y > 1/2a$ es poden traçar tres normals. La longitud dels segments normals "no verticals" és

$$\sqrt{x_0^2 + \frac{1}{4a^2}}$$

i ara només cal provar que

$$\sqrt{x_0^2 + \frac{1}{4a^2}} < ax_0^2 + \frac{1}{2a},$$

que es demostra elevant al quadrat.

10.- Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle.

a) Determineu els punts P del pla que compleixen:

$\text{àrea}(PAB) = \text{àrea}(PBC) = \text{àrea}(PCA)$ (1)

b) Siga P un punt interior del triangle que compleix (1), siguen P_1, P_2, P_3 els punts interiors als triangles $\overset{\Delta}{PBC}, \overset{\Delta}{PCA}, \overset{\Delta}{PAB}$ en les mateixes condicions. Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{P_1P_2P_3}$ en funció de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:

Un triangle divideix el pla en 7 regions: una fitada $\mathcal{I}$ (interna), i sis no fitades, tres de tipus $\mathcal{R}$ i tres de tipus $\mathcal{S}$. (figura 1)

A les regions de tipus $\mathcal{R}$ no hi pot haver cap punt que compleixi la propietat ja que $\grave{\text{A}}\text{rea}(PAC) < \grave{\text{A}}\text{rea}(PAB)$. (figura 2)

Busquem els punts de les regions $\mathcal{S}$. Els triangles PAB i PAC tenen la mateixa base PA i la mateixa àrea. Per tant, han de tenir la mateixa altura i això exigeix que la recta PA sigui paral·lela a la recta BC.

Anàlogament, la recta PC ha de ser paral·lela a la AB, i el punt P és quart el vèrtex d'un paral·lelogram que té els altres tres vèrtexs a A, B i C. (figura 3 i figura 4)

Sigui P un punt interior que compleixi la condició, i M el punt mitjà de BC. Es compleix que $\grave{\text{A}}\text{rea}(PCM) = \grave{\text{A}}\text{rea}(PMB)$, i com que, per hipòtesi és $\grave{\text{A}}\text{rea}(PAC) =$

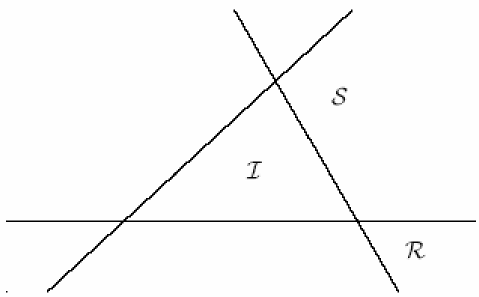


Fig.1.

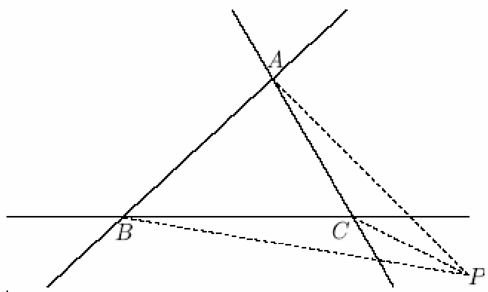


Fig.2.

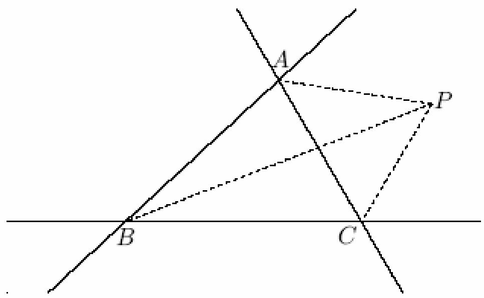


Fig.3.

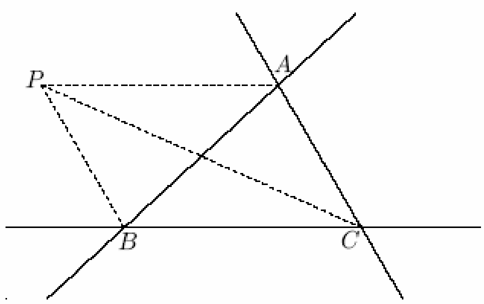


Fig.4.

$\grave{\text{A}}\text{rea}(PAB)$ resulta que

$$\grave{\text{A}}\text{rea}(PAC) + \grave{\text{A}}\text{rea}(PCM) = \grave{\text{A}}\text{rea}(PAB) + \grave{\text{A}}\text{rea}(PMB) = \frac{1}{2}\grave{\text{A}}\text{rea}(ABC).$$

Per altra banda,

$$\grave{\mathrm{A}}\mathrm{rea}(ACM) = \grave{\mathrm{A}}\mathrm{rea}(ABM) = \frac{1}{2}\grave{\mathrm{A}}\mathrm{rea}(ABC)$$

i per tant P ha d'estar sobre la mitjana AM, i en conseqüència, P ha de ser el baricentre de ABC. (figura 5)

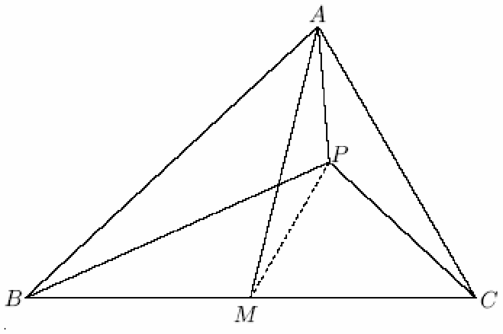


Fig.5.

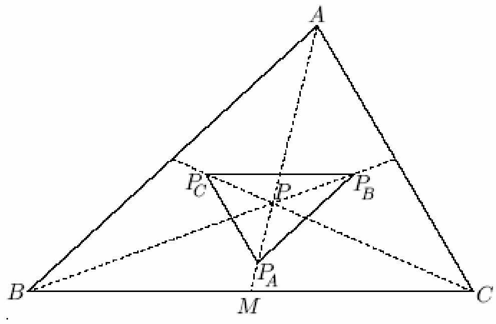


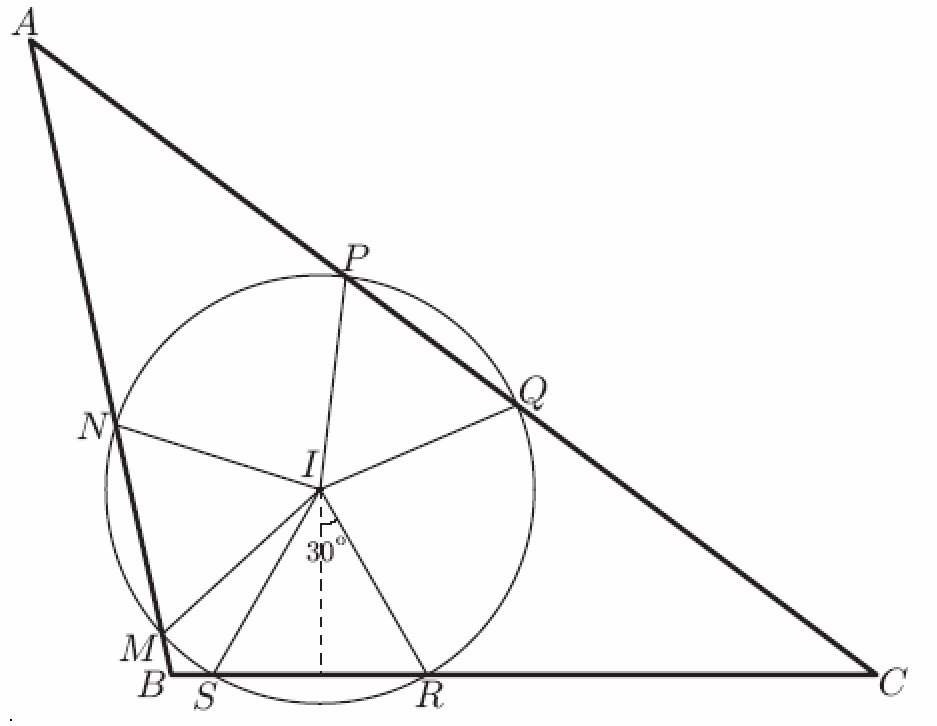
Fig.6.

Tenim les igualtats de segments: $PP_A = 2/3PM = 2/9AM$, però com que $AP = 2/3AM$ resulta $PP_A = 1/3PA$. El triangle $P_AP_BP_C$ és homotètic del ABC amb centre P i raó $-\frac{1}{3}$. Per tant $\grave{\mathrm{A}}\mathrm{rea}(P_AP_BP_C) = \frac{1}{9}\grave{\mathrm{A}}\mathrm{rea}(ABC)$. (figura 6).

11.- Trobeu el centre i el radi de la circumferència que intercepta sobre cada costat d'un triangle donat segments iguals al radi.

Solució:

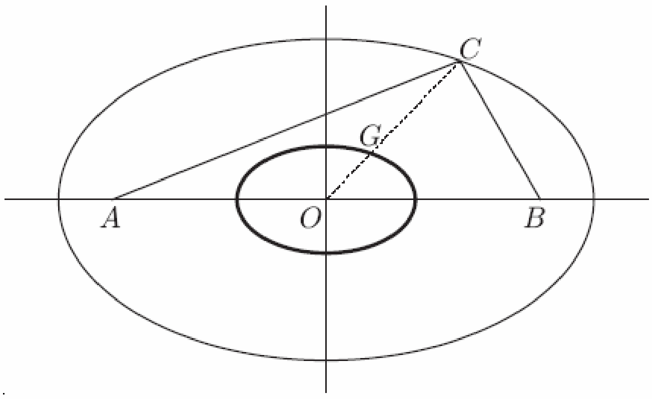
Suposem el problema resolt i considerem la circumferència solució de centre I i radi r. Els triangles MNI, QIP i RSI són equilàters i iguals. Les altures d'aquests triangles també seran iguals. Per tant el punt I equidista dels tres costats i és l'incentre del triangle. Traçant per I una perpendicular al costat BC i rectes a cada costat que formin amb ella angles de 30° obtindrem els triangles equilàters buscats.



12. Donat un segment $\overline{AB}$ de longitud 8m, trobeu el lloc geomètric dels baricentres dels triangles de base $\overline{AB}$, els perímetres dels quals amida 18m.

Solució:

–Si C és el vèrtex del triangle ABC, ha de ser $AC + BC = 10$ i el lloc geomètric de C és una el·lipse de focus A i B. Del punt mitjà del segment AB diguem-ne O i del baricentre del triangle ABC diguem-ne G. Com que $OG = \frac{1}{3}OC$, resulta que G està en l'el·lipse homotètica de l'anterior en l'homotècia de centre O i raó $\frac{1}{3}$.



També podem calcular analíticament. Posem els eixos de coordenades als eixos de l'el·lipse. Les coordenades de C són $(\overline{x}, \overline{y})$ i les de G són (x, y). L'homotècia esmentada abans ens diu que $x = \overline{x}/3$, $y = \overline{y}/3$. L'el·lipse lloc geomètric de C té semieix major $a = 5$, distància focal $c = 4$ i semieix menor $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 3$. L'equació d'aquesta el·lipse serà

$$\frac{\overline{x}^2}{25} + \frac{\overline{y}^2}{9} = 1.$$

Substituint els valors de x, y queda

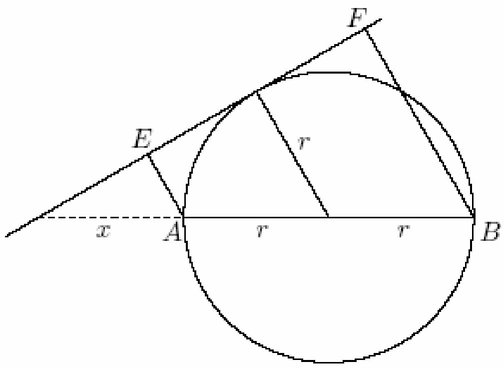
$$\frac{9x^2}{25} + \frac{9y^2}{9} = \frac{x^2}{\frac{25}{9}} + y^2 = 1$$

que és l'equació d'una el·lipse de centre O i semieixos $\frac{5}{3}$ i 1.

13.- Comproveu que la suma de distàncies dels dos extrems d'un diàmetre d'una circumferència a una tangent qualsevol de la circumferència és constant.

Solució:

Primera solució.



La suma de distàncies demanades és constant i igual al diàmetre. Pel teorema de Tales tenim

$$\frac{x}{EA} = \frac{x+r}{r} = \frac{x+2r}{FB}.$$

Si sumem antecedent i conseqüents, la raó que surt és igual a les raons que formen la proporció:

$$\frac{x+r}{r} = \frac{x}{EA} = \frac{x+2r}{FB} = \frac{2x+2r}{EA+FB}$$

i si ara igualem la primera i l'última queda $EA + FB = \dfrac{2x+2r}{x+r}\, r = 2r.$

Segona solució.

Si es dibuixen els simètrics respecte del centre dels punts de la figura anterior, es veu directament el valor de la suma demanada.