

1.- El costat del quadrat ABCD és 1. Determineu el costat del rombe, un dels vèrtexs del qual és A, el vèrtex oposat es troba en la recta BD i els dos restants en les rectes BC i CD.  
Shariguin I153.

Solució:

Considerem el quadrat en les següents coordenades cartesianes:

$A(0,0)$ ,  $B(1,0)$ ,  $C(1,1)$ ,  $D(0,1)$ .

La recta que passa pels punts B, D té equació:

$$y = -x + 1.$$

Siga AEFG el rombe que cerquem:

Les coordenades de E, F, i G són:

$F(a, -a + 1)$ ,  $E(1, b)$ ,  $G(c, 1)$ .

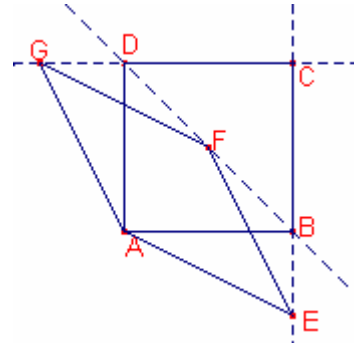
Per a ser AEFG un rombe  $\overline{AG} = \overline{EF}$ ,  $\overline{AG} = \overline{AE}$ .

$$\overline{AG} = (c, 1), \overline{EF} = (a - 1, -a + 1 - b), \overline{AG} = \sqrt{1 + c^2}, \overline{AE} = \sqrt{1 + b^2}.$$

Aleshores:

$$\begin{cases} c = a - 1 \\ 1 = -a + 1 - b \\ c^2 = b^2 \end{cases} \text{ Resolent el sistema, } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{-1}{2} \\ c = \frac{-1}{2} \end{cases}.$$

Aleshores el costat del rombe és,  $\overline{AE} = \sqrt{1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .



2.- Els vèrtex d'un hexàgon regular de costat  $a$  són els centres de circumferències els radis de les quals són iguals a  $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ . Determineu l'àrea de la part de l'hexàgon que roman fora d'aquestes circumferències.  
Shariguin I51.

Solució:

Considerem l'hexàgon regular de costat  $a = \overline{AB}$ , de centre  $O$ .

Considerem la circumferència de centre  $a$  i radi

$$\overline{AP} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Siga  $\overline{OM}$  l'altura del triangle equilàter  $\triangle OAB$ .

$$\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Siga  $N$  la intersecció de  $\overline{OM}$  i la circumferència de centre  $A$  que passa per  $P$ .

$$\overline{AN} = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \quad \overline{AM} = \frac{1}{2}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$\triangle AMN$ :

$$\overline{MN} = \sqrt{\overline{AN}^2 - \overline{AM}^2} = \frac{1}{2}a.$$

Aleshores,  $\angle NAM = 45^\circ$ .  $\angle PAN = 15^\circ$ .

La superfície del sector de centre  $A$  i arc  $PN$  és la 24 part de la circumferència de centre  $A$  i radi  $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ , és a dir:

$$\frac{1}{24}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{\pi}{48}a^2.$$

L'àrea del triangle  $\triangle AON$  és:

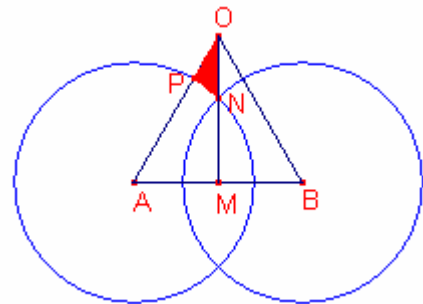
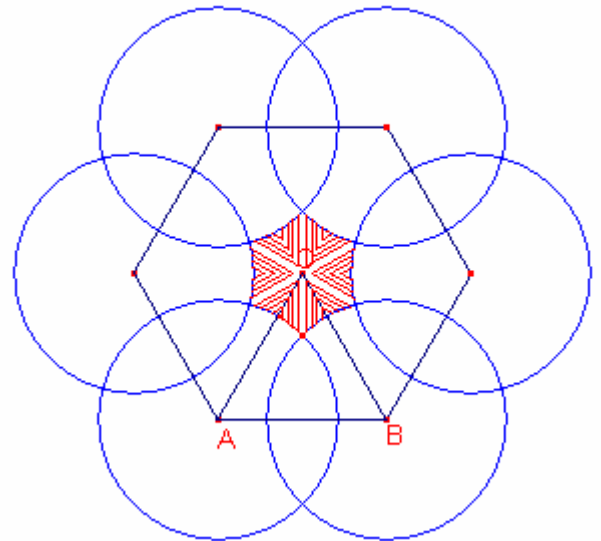
$$S_{AON} = \frac{\overline{AO} \cdot \overline{AN} \cdot \sin 15^\circ}{2} = \frac{\frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{8}a^2$$

L'àrea del triangle  $\triangle AON$  menys l'àrea del sector

$$\frac{-1+\sqrt{3}}{8}a^2 - \frac{\pi}{48}a^2.$$

L'àrea de la part de l'hexàgon que roman fora d'aquestes circumferències és 12 vegades l'àrea anterior:

$$S = 12\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{48}\right)a^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}\right)a^2.$$



3.- Les àrees dels triangles formats pels segments de les diagonals d'un trapezi i les seues bases són  $S_1, S_2$ . Determineu l'àrea del trapezi.

Shariguin 145.

Solució:

Siga el trapezi ABCD,  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ . Siga O la intersecció de les diagonals.

Siga  $h_1$  l'altura del triangle  $\triangle ABO$  referida a la base  $a = \overline{AB}$ .

Siga  $h_2$  l'altura del triangle  $\triangle CDO$  referida a la base  $b = \overline{CD}$ .

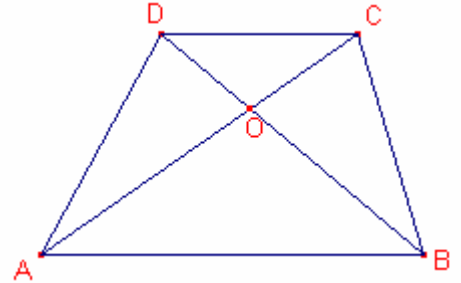
Siga  $S_1 = S_{\triangle ABO}$ ,  $S_2 = S_{\triangle CDO}$ .  $S_1 = \frac{a \cdot h_1}{2}$ ,  $S_2 = \frac{b \cdot h_2}{2}$ .

Els triangles  $\triangle ABO$ ,  $\triangle CDO$  són semblants, aleshores:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}.$$

L'àrea del trapezi ABCD és:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a+b}{2}(h_1+h_2) = \frac{\left(\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}b+b\right)}{2} \left(\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}h_2+h_2\right) = \\ &= \frac{\left(\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}+1\right)^2 b \cdot h_2}{2} = \frac{\left(\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}+1\right)^2 2S_2}{2} = \left(\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}+1\right)^2 S_2 = \left(\frac{S_1}{S_2}+1+2\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}\right) S_2 = \\ &= S_1+S_2+2\sqrt{S_1 \cdot S_2} = \left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2. \end{aligned}$$



4.- Els costats d'un paral·lelogram són  $a$ ,  $b$   $a \neq b$ . Dins de quin límits pot variar el cosinus de l'angle agut entre les diagonals.  
Shariguin I160.

Solució:

Siga el paral·lelogram ABCD,  $a = \overline{AB} = \overline{CD}$ ,  $b = \overline{BC} = \overline{AD}$ .  
Suposem que  $a > b$ .

Siga O la intersecció de les diagonals  $m = \overline{AC}$ ,  $n = \overline{BD}$ .  
Siga  $\alpha = \angle DOA$ ,  $\beta = \angle DAB$ .

Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle ABD$ :  
 $n^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \beta$ .

Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle ACD$ :  
 $m^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \beta$ .

Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle AOD$ :

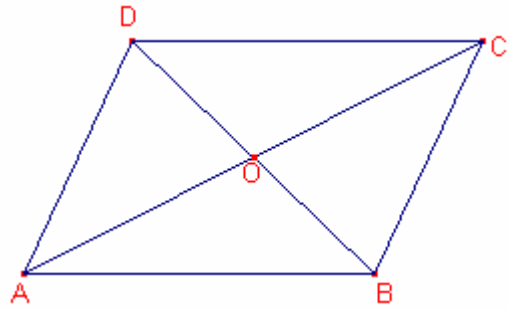
$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{b^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2}{-2 \frac{mn}{4}} = \\ &= \frac{b^2 - \frac{a^2 + b^2 + 2ab \cos \beta}{4} - \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta}{4}}{-\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \beta} \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta}} = \\ &= \frac{\frac{b^2 - a^2}{2}}{-\frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2 \cos^2 \beta}} = \\ &= \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2 \sin^2 \beta}}. \end{aligned}$$

Aleshores:

$$\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2 \sin 0^\circ}} > \cos \alpha > \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2 \sin 90^\circ}}.$$

$$1 > \cos \alpha > \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Per tant,  $1 > \cos \alpha > \frac{|a^2 - b^2|}{a^2 + b^2}$ .



5.- L'àrea d'un rombe és  $S$  i la suma de les seues diagonals és  $m$ . Determineu el costat del rombe.

Shariguin 59.

Solució:

Siga

Siga el rombe  $ABCD$  de costat  $c = \overline{AB}$  de diagonals  $D = \overline{AC}$ ,  $d = \overline{BD}$ .

Siga  $O$  la intersecció de les diagonals.

Les diagonals d'un rombe són perpendiculars.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle  $AOD$ :

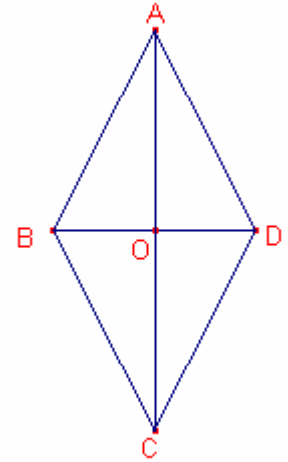
$$c^2 = \frac{D^2 + d^2}{4}.$$

L'àrea del rombe és:  $S = \frac{Dd}{2}$ .

$$m^2 = (D + d)^2 = D^2 + d^2 + 2Dd = 4c^2 + 4S.$$

Aïllant  $c$  de l'equació anterior:

$$c = \frac{\sqrt{m^2 - 4S}}{4}.$$



6.- Un quadrat de costat  $a$  està inscrit en una circumferència. Determineu el costat del quadrat inscrit en un dels segments circulars obtinguts.  
Shariguin I60.

Solució:

Siga  $ABCD$  un quadrat de costat  $a = \overline{AB}$ . Siga  $O$  el seu centre.

Siga la circumferència circumscrita al quadrat  $ABCD$ .

Aplicat el teorema de Pitàgores el seu radi és:

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

Siga  $EFGH$  el quadrat inscrit en un segment circular:

Siga  $x = \overline{EF}$ .

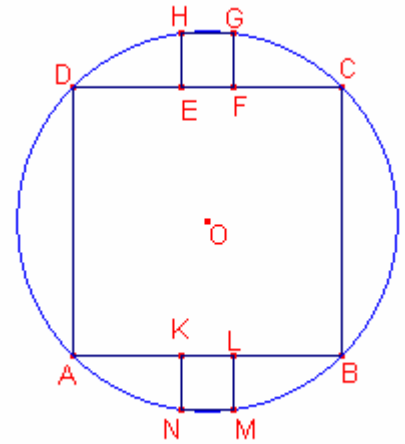
Siga  $KLMN$  el quadrat simètric de  $EFGH$  respecte del centre  $O$  del quadrat inicial.

$$\overline{HK} = 2R = \sqrt{2}a, \quad \overline{GM} = 2x + a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle  $HGM$ :

$$(2x + a)^2 + x^2 = (\sqrt{2}a)^2. \text{ Resolent l'equació en la incògnita } x:$$

$$x = \frac{a}{5}.$$



7.- En un segment circular amb un arc de  $120^\circ$  i una altura  $h$  està inscrit el rectangle ABCD de manera que  $\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 4$  ( $\overline{BC}$  sobre la corda). Determineu l'àrea del rectangle.

Shariguin I61

Solució:

Considerem la circumferència de centre O i radi R.

Siga la corda  $\overline{PQ}$  que abraça un arc de  $120^\circ$ .

Siga E el punt mig de l'arc PQ.

Considerem el rectangle ABCD. Siga F el punt mig de  $\overline{BC}$ .

Per hipòtesi  $h = \overline{FE}$ .  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{1}{4}$ . Siga  $\overline{AB} = x$ ,  $\overline{BC} = 4x$

Siga el rectangle  $A'B'C'D'$  simètric del rectangle ABCD respecte de O.

$\angle OQF = 30^\circ$ . Aleshores,  $\overline{OF} = \frac{1}{2}\overline{OQ} = \frac{1}{2}R$ .

$R = \overline{OE} = \overline{OF} + \overline{FE} = \frac{1}{2}R + h$ . Aleshores,  $R = 2h$

Considerem el rectangle  $ADD'A'$

$\overline{AD'} = 2R = 4h$ ,  $\overline{DD'} = 2\overline{AB} + 2\overline{OF} = 2x + 2h$ .

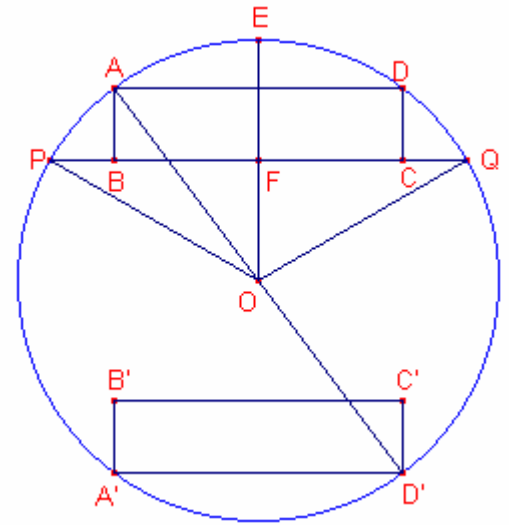
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle  $ADD'$ :

$(4h)^2 = (4x)^2 + (2x + 2h)^2$ . Resolent l'equació en x:

$x = \frac{3}{5}h$ .

L'àrea del rectangle ABCD és:

$$S = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = x \cdot 4x = 4x^2 = 4\left(\frac{3}{5}h\right)^2 = \frac{36}{25}h^2.$$



8.- L'àrea d'un anell circular és igual a  $S$ . El radi de la circumferència major és igual a la longitud de la menor. Determineu el radi de la circumferència menor.  
Shariguin 162.

Solució:

Siga  $\overline{OA} = r$  radi de la circumferència menor.

Siga  $\overline{OB} = R$  radi de la circumferència major.

$$2\pi r = R.$$

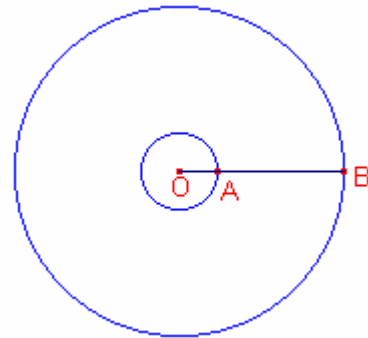
L'àrea de la corona circular és:

$$S = \pi(R^2 - r^2).$$

$$S = \pi((2\pi r)^2 - r^2).$$

$$S = \pi(4\pi^2 - 1)r^2. \text{ Aïllant la incògnita } r:$$

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi(4\pi^2 - 1)}}.$$



9.- Siga el quadrat ABCD de costat a. Determineu el radi de la circumferència que passa pel punt mig del costat  $\overline{AB}$ , el centre del quadrat i el vèrtex C. Shariguin I65.

Solució:

Siga O el centre del quadrat i D el punt mig del costat  $\overline{AB}$ .

Siga F el punt mig del costat  $\overline{BC}$ .

$$\overline{EO} = \frac{a}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle  $\triangle EBC$ :

$$\overline{EC} = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle  $\triangle OFC$ :

$$\overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

L'àrea del triangle  $\triangle EOC$  és:

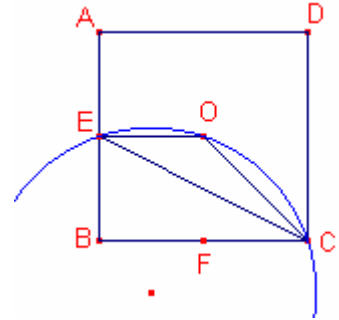
$$S = \frac{\overline{EO} \cdot \overline{OF}}{2} = \frac{1}{8}a^2.$$

$S = \frac{\overline{EO} \cdot \overline{OC} \cdot \overline{CE}}{4R}$  on R és el radi de la circumferència circumscria al triangle  $\triangle EOC$ .

$$S = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a}{4R} = \frac{\sqrt{10}}{32R}a^3. \text{ Igualant les àrees:}$$

$$\frac{1}{8}a^2 = \frac{\sqrt{10}}{32R}a^3. \text{ Resolent l'equació en R:}$$

$$R = \frac{\sqrt{10}}{4}a.$$



10.- Siga el quadrat ABCD. Siga M el punt mig del costat  $\overline{AB}$ . Siga N del costat  $\overline{BC}$  tal que  $2 \cdot \overline{BN} = \overline{NC}$ . Siga K del costat  $\overline{DA}$  tal que  $2 \cdot \overline{DK} = \overline{KA}$ . Determineu el sinus de l'angle format per les rectes MC, NK. Shariguin I93.

Solució:

Siga O el punt intersecció de les rectes MC, NK.

Siga P del costat  $\overline{BC}$  tal que  $\overline{OP}$  és perpendicular al costat  $\overline{BC}$ .

Siga Q del costat  $\overline{BC}$  tal que  $\overline{KQ}$  és perpendicular al costat  $\overline{BC}$ .

Siga  $\alpha = \angle NOP$ ,  $\beta = \angle POQ$ .

Siga  $a = \overline{AB}$ .

$$\overline{BN} = \frac{a}{3}, \overline{KA} = \frac{a}{3}. \text{ Aleshores, } \overline{NQ} = \frac{a}{3}.$$

Els triangles  $\triangle NOP$ ,  $\triangle NKQ$  són semblants, aleshores,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{NQ}}{\overline{KQ}} = \frac{1}{3}.$$

Els triangles  $\triangle POQ$ ,  $\triangle BMC$  són semblants, aleshores,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{BM}} = 2.$$

L'angle que formen les rectes MC, NK és  $\alpha + \beta$ .

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{1}{3} + 2}{1 - \frac{1}{3} \cdot 2} = 7.$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

