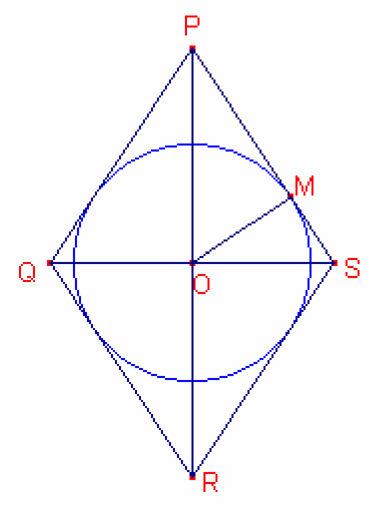
1.- Determineu els angles del rombe, si l'àrea del cercle inscrit en ells és dues vegades menor que la del rombe.
Shariguin I114.

Solució:
Siga PQRS el rombe de centre O.

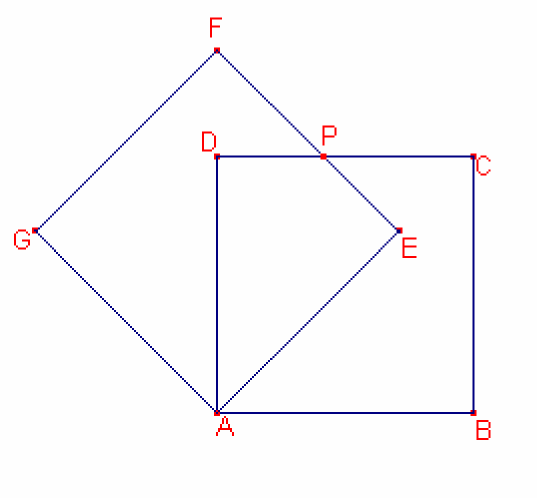



Siga $D=\overline{PR}$, $d=\overline{QS}$ les diagonals del rombe:
Siga r el radi de la circumferència inscrita al rombe.
Siga M el punt de tangència de la circumferència i el costat $\overline{PR}$.
Per hipòtesi l'àrea del cercle inscrit en ells és dues vegades menor que la del rombe, aleshores:
$\frac{Dd}{2}=2\pi r^2$. $\frac{r}{D}\frac{r}{d}=\frac{1}{4\pi}$.
Siga $\alpha=\angle QPS$ angle del rombe.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle $\overset{\Delta}{PMO}$:
$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2r}{D}$. $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2r}{d}$. Aleshores, $\frac{r}{D}=\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$, $\frac{r}{d}=\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.
$\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4\pi}$.
$2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\pi}$.
$\sin\alpha=\frac{2}{\pi}$.

2.- Determineu l'àrea de la part comuna de dos quadrats, si cadascun d'ells té el costat igual a a i el segon s'obté girant el primer al voltant del vèrtex un angle de 45º.
Shariguin I115

Solució:
Siguen els quadrats ABCD, AEFG.
Siga P el punt d'intersecció dels dos quadrats.




Per simetria $\angle DAP = \frac{45^\circ}{2}$.

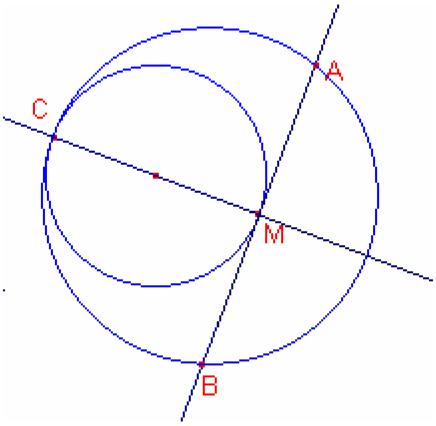
$\text{tg}\frac{45^\circ}{2} = \frac{\overline{DP}}{\overline{AD}}$. $\text{tg}\frac{45^\circ}{2} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$.

$\overline{DP} = \left(\sqrt{2}-1\right)a$.

L'àrea de la part comuna al dos quadrat és el doble de l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADP}$.

$S = 2\frac{\overline{AD}\cdot\overline{DP}}{2} = \left(\sqrt{2}-1\right)a^2$.

3.- Certa recta té un punt de tangència M en una circumferència de radi r. En aquesta recta, a ambdós costats del put M s'agafen els punt A, B de forma que $\overline{MA} = \overline{MB} = a$. Determineu el radi de la circumferència que passa per A i B i és tangent a la circumferència donada..
Shariguin I68.




Solució:
Siga C el punt de tangència de les dues circumferències.
C és el punt mig de l'arc AB.

$\overline{CM} = 2r$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{AMC}$:
$\overline{AC} = \sqrt{4r^2 + a^2}$.

Siga $\alpha = \angle CAM$. $\sin\alpha = \dfrac{2r}{\sqrt{4r^2 + a^2}}$

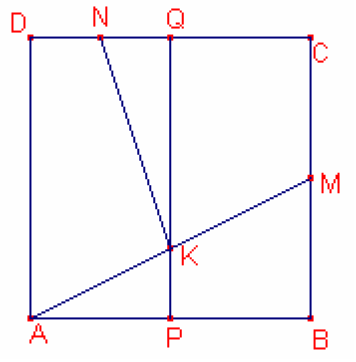
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\alpha} = 2R$ on R és el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\dfrac{\sqrt{4r^2 + a^2}}{\dfrac{2r}{\sqrt{4r^2 + a^2}}} = 2R$. Aïllant R de la relació:

$R = \dfrac{4r^2 + a^2}{4r}$.

4.- Siga el quadrat ABCD de costat a. Determineu la distància entre el punt mig K del segment $\overline{AM}$ on M és el punt mig del costat $\overline{BC}$, i el punt N del costat $\overline{CD}$ tal que $\overline{CN}:\overline{ND}=3:1$.
Shariguin I70.




Solució:

Si $\overline{CN}:\overline{ND}=3:1$, aleshores, $\overline{DN}=\frac{1}{4}a$, $\overline{CN}=\frac{3}{4}a$.

Siga la recta r perpendicular al costat $\overline{AB}$ que passa per K.
La recta r talla el costat $\overline{AB}$ en el punt P i al costat $\overline{CD}$ en el punt Q.

Els triangles $\overset{\Delta}{APK}$, $\overset{\Delta}{ABM}$ són semblants i de raó 1:2.

Aleshores, $\overline{PK}=\frac{1}{2}\overline{BM}=\frac{1}{2}\frac{a}{2}=\frac{1}{4}a$.

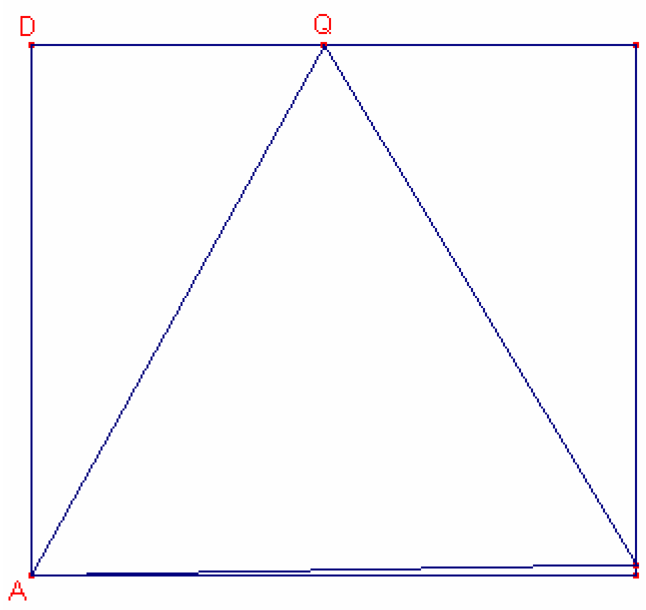
$\overline{KQ}=a-\frac{a}{4}=\frac{3}{4}a$.

$\overline{NQ}=\frac{1}{4}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{NQK}$:

$\overline{NK}=\sqrt{\overline{NQ}^2+\overline{KQ}^2}=\sqrt{\frac{1}{16}a^2+\frac{9}{16}a^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}a$.

5.- En un rectangle de costats 8 i 7 determineu el costat del triangle equilàter que té un vèrtex en un dels vèrtexs del rectangle i els altres dos vèrtexs en els costats que no contenen al primer vèrtex.
Shariguin I144.




Solució:

Siga el rectangle ABCD $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 7$.

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{APQ}$ inscrit en el rectangle ABCD, $\overline{AP} = a$.

Siga $\alpha = \angle PAB$. $\angle DAQ = 30^\circ - \alpha$.

Aplicant raons trigonomètriques als triangles $\overset{\Delta}{PAB}$, $\overset{\Delta}{QDA}$ respectivament:

$$\cos\alpha = \frac{8}{a}, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{a^2 - 64}}{a}. \quad \cos(30^\circ - \alpha) = \frac{7}{a}.$$

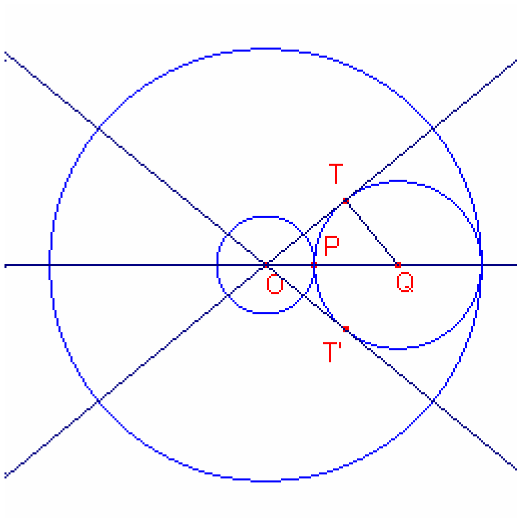
$$\cos 30^\circ \cos\alpha + \sin 30^\circ \sin\alpha = \frac{7}{a}.$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{8}{a} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a^2 - 64}}{a} = \frac{7}{a}.$$

$8\sqrt{3} + \sqrt{a^2 - 64} = 14$. Resolent l'equació: $a = 2\sqrt{113 - 56\sqrt{3}}$.

6.- Siguen dues circumferències concèntriques de radis R, r $(R > r)$ i centre comú O. Una tercera circumferència és tangent a les dues primeres. Determineu la tangent de l'angle que formen les tangents des del punt O a la tercera circumferència.
Shariguin I105.

Solució:
Siga s el radi de la tercera circumferència,
$s = \frac{R-r}{2}$.
Siga Q el centre de la tercera circumferència i T el punt de tangència d'una recta tangent a la tercera circumferència que passa pel punt O.



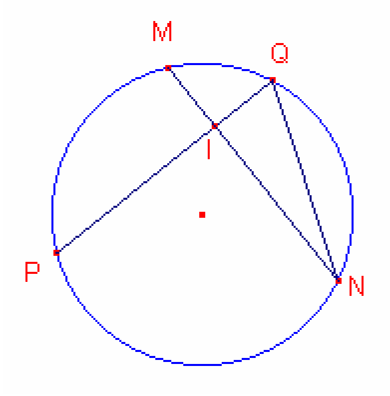

$\overset{\Delta}{OTQ}$ és un triangle rectangle, $T = 90^{\circ}$.
Siga $\alpha = \angle TOQ$.
$\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ} = r + \frac{R-r}{2} = \frac{R+r}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{OTQ}$:
$$\overline{OT} = \sqrt{\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 - \left(\frac{R-r}{2}\right)^2} = \sqrt{Rr}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle $\overset{\Delta}{OTQ}$:
$$tg\alpha = \frac{\overline{TQ}}{\overline{OQ}} = \frac{R-r}{2\sqrt{Rr}}.$$
L'angle que formen les dues tangents és $2\alpha$:
$$tg2\alpha = \frac{2\frac{R-r}{2\sqrt{Rr}}}{1-\left(\frac{R-r}{2\sqrt{Rr}}\right)^2} = \frac{(R-r)\sqrt{Rr}}{6Rr - R^2 - r^2}.$$

7.- En una circumferència de radi R estan dibuixades dues cordes $\overline{MN}$ , $\overline{PQ}$ , perpendiculars. Determineu la distància entre els punts M i N si $\overline{NQ} = a$ .
Shariguin I110.

Solució:
Siga I la intersecció de les cordes $\overline{MN}$ , $\overline{PQ}$ .




$$90^o = \angle PIM = \frac{\overset{\frown}{PM} + \overset{\frown}{QN}}{2}.$$

Siga l'arc $\overset{\frown}{PM} = \alpha$ , aleshores l'arc $\overset{\frown}{NQ} = 180^o - \alpha$ .

$\angle PNM = \frac{\alpha}{2}$, $\angle QPN = 90^o - \frac{\alpha}{2}$, per ser angles inscrits.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{QPN}$:

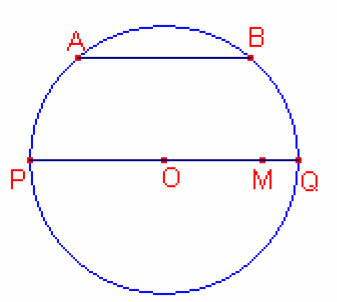
$$\frac{a}{\sin\left(90^o - \frac{\alpha}{2}\right)} = 2R, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2R}\right)^2}.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{PMN}$ :

$$\frac{\overline{PM}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2R.$$

Aleshores, $\overline{PM} = \sqrt{4R^2 - a^2}$ .

8.- Determineu la suma de les distàncies al quadrat des del punt M, situat en el diàmetre d'una circumferència, fins als extrems de qualsevol corda paral·lela al diàmetre, si la distància del punt M al centre és a.
Shariguin I83.




Solució:
Siga $\overline{PQ}$ el diàmetre de la circumferència. Siga $\overline{AB}$ una corda paral·lela a $\overline{PQ}$.
Siga O el centre de la circumferència. $a=\overline{OM}$.
Siga $\alpha=\angle BOM$, $\angle AOP=\alpha$, $\angle AOM=180º-\alpha$.
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BOM}$:
$\overline{MB}^2=R^2+a^2-2Ra\cdot\cos\alpha$.
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AOM}$:
$\overline{MA}^2=R^2+a^2-2Ra\cdot\cos(180º-\alpha)$
Aleshores,
$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=R^2+a^2+2Ra\cdot\cos\alpha+R^2+a^2-2Ra\cdot\cos\alpha=2\left(R^2+a^2\right)$.

9.- Demostreu que tres segments de longituds $a, b, c > 0$ formen un triangle si i només si $pa^2 + qb^2 > pqc^2$ per a qualsevol reals p, q tal que $p + q = 1$.
Lidski 106.

Solució:
$(\Rightarrow)$

a, b, c formen un triangle si $\begin{cases} a + b - c > 0 \\ a - b + c > 0 \\ -a + b + c > 0 \end{cases}$.

Siga $p + q = 1$,

$pa^2 + qb^2 - pqc^2 = pa^2 + (1-p)b^2 - p(1-p)c^2 = c^2p^2 + (a^2 - b^2 - c^2)p + b^2$.

Siga $f(p) = c^2p^2 + (a^2 - b^2 - c^2)p + b^2$.

Aquesta funció és una paràbola de coeficient de segon grau positiu.
La paràbola és positiva si el discriminant és menor que zero:

$\left(a^2 - b^2 - c^2\right)^2 - 4c^2b^2 < 0$.

$\left(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\right)\left(a^2 - b^2 - c^2 - 2bc\right) < 0$.

$\left(a^2 - (b-c)^2\right)\left(a^2 - (b+c)^2\right) < 0$.

$(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(a - b - c) < 0$.

$(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(-a + b + c) > 0$.

La qual cosa és certa.

$(\Leftarrow)$

Si $pa^2 + qb^2 > pqc^2$, per a tot $p + q = 1$.

Tenim que, $(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(-a + b + c) > 0$.

Com $a, b, c > 0$, $(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) > 0$.

Si els tres factors són positius, aleshores tenim les tres desigualtats triangulars i per tant podríem construir un triangle.

Si tenim dos factors negatius i un de positiu, per exemple:

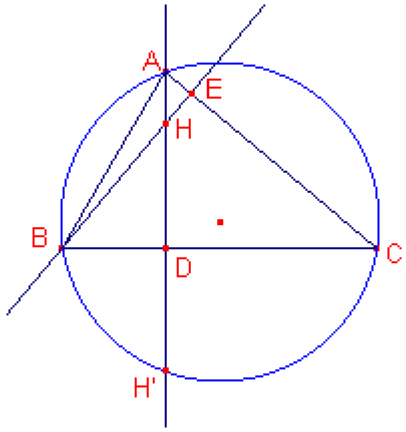
$\begin{cases} a + b - c < 0 \\ a - b + c < 0 \\ -a + b + c > 0 \end{cases}$.

Sumant les dues primeres inequacions:

$2a < 0$, la qual cosa contradiu que $a > 0$.

10.- Siga $\overline{AD}$ l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i H l'ortocentre. Demostreu que $\overline{DC}\cdot\overline{DB} = \overline{AD}\cdot\overline{DH}$.
Gúsiev 51.

Solució:




Siga $\overline{BE}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Considerem la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
L'altura $\overline{AD}$ talla la circumferència circumscrita en el punt H'.

$\angle HBC = 90º - C$ ja que $\overset{\Delta}{BEC}$ és rectangle.
$\angle BH'A = C$ per ser angle inscrit en la circumferència i abraçar el mateix arc que l'angle C.

Aleshores els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BDH}$, $\overset{\Delta}{BDH'}$ són iguals, per tant: $\overline{DH} = \overline{DH'}$.
Aplicant la potència del punt D respecte de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
$\overline{DB}\cdot\overline{DC} = \overline{DA}\cdot\overline{DH'} = \overline{DA}\cdot\overline{DH}$.