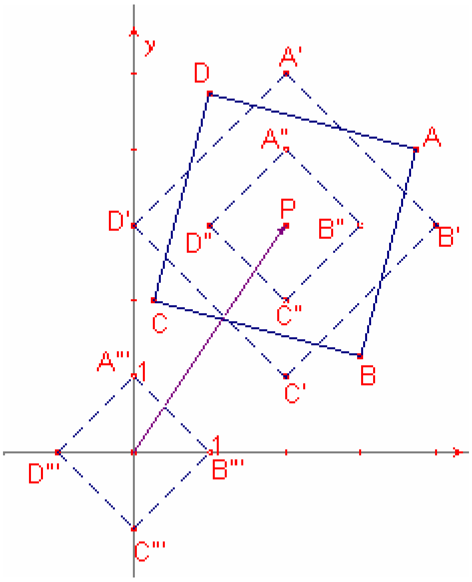
1.- Determineu els vèrtexs d'un quadrat sabent que:
a) El seu centre està en (2, 3)
b) Si es trasllada el centre a l'origen, es gira un angle de 60º en sentit positiu i es redueixen els costats a la meitat, els vèrtexs del nou quadrat són els afixos de les arrels d'un polinomi de grau quatre amb coeficients reals, essent una de les arrels $x = 1$.
Oposicions Extremadura 2006.




Solució:
Si un quadrat A"'B"'C"'D"' de centre (0, 0) té un vèrtex en B"'(1,0), els altres vèrtexs són:
$A'''(0,1),\ D'''(-1,0),\ C'''(0,-1)$.

El quadrat A"B"C"D" traslladat de l'anterior en la direcció $v = (2,3)$ els seus vèrtexs són:
$A''(2,4),\ B''(3,3),\ C''(2,2),\ D''(1,3)$.

El quadrat A'B'C'D' de centre P(2,3) augmentant els costats de l'anterior el doble (homotècia de centre (2,3) i raó 2) té vèrtexs:
$A'(2,5),\ B'(4,3),\ C'(2,1),\ D'(0,3)$.

Determinem les coordenades del quadrat ABCD girat de l'anterior $-60^{o}$ amb centre P.

Siga $z_1$ l'afix del punt A, siga z l'afix del punt P.
$\overline{PA'} = 2$.
$z_1 - z = 2_{30^{o}}$
Aleshores, $A\left(2+\sqrt{3}, 4\right)$.

Siga $z_2$ l'afix del punt B, siga z l'afix del punt P.
$z_2 - z = 2_{30^{o}-90^{o}}$
Aleshores, $B\left(3, 3-\sqrt{3}\right)$.

Siga $z_3$ l'afix del punt C, siga z l'afix del punt P.
$z_3 - z = 2_{30^{o}-180^{o}}$
Aleshores, $A\left(2-\sqrt{3}, 2\right)$.

Siga $z_4$ l'afix del punt D, siga z l'afix del punt P.
$z_4 - z = 2_{30^{o}-270^{o}}$
Aleshores, $B\left(1, 3+\sqrt{3}\right)$.

2.- Resoleu un triangle rectangle coneguts la hipotenusa i la suma de dos catets.

Solució:

Siga a la hipotenusa del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$.
Siga $m = b + c$ la suma dels dos catets.
Aplicant el teorema de Pitàgores: $a^2 = b^2 + c^2$.
$m^2 = (b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + 2bc$.

Aleshores, $bc = \dfrac{m^2 - a^2}{2}$

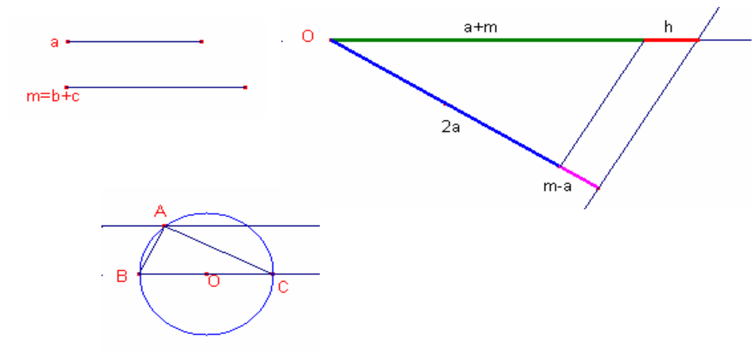
Siga h l'altura del triangle sobre la hipotenusa.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$\dfrac{ah}{2} = \dfrac{bc}{2}$. $\quad ah = \dfrac{m^2 - a^2}{2}$. $\quad ah = \dfrac{(m + a)(m - a)}{2}$.

$\dfrac{h}{m - a} = \dfrac{m + a}{2a}$.

La construcció és la següent:
a) Construïu la quarta proporcional dels segments $m - a$, $m + a$, 2a, que és l'altura sobre la hipotenusa.
b) Dibuixeu el segment $a = \overline{BC}$.
c) Dibuixeu la semicircumferència de diàmetre $a = \overline{BC}$.
d) Dibuixeu una recta paral·lela al segment $\overline{BC}$ de distància h.
e) La recta anterior talla la semicircumferència en el punt A.
f) Dibuixeu el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.




Resolució del triangle:
L'altura del triangle sobre la hipotenusa és:

$h = \dfrac{m^2 - a^2}{2a}$.

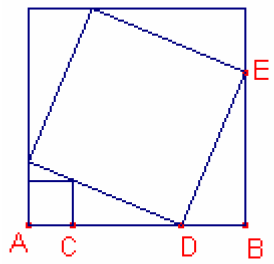
Considerem el sistema format pel teorema de Pitàgores i igualtat de les àrees:

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = a^2 \\ bc = ah \end{cases}$$

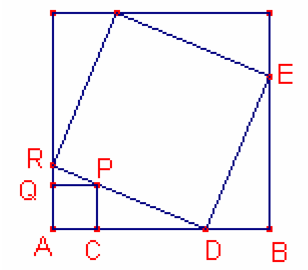
Resolent el sistema: $\begin{cases} b^2 = \dfrac{a^2 + a\sqrt{a^2 - 4h^2}}{2} \\ c^2 = \dfrac{a^2 - a\sqrt{a^2 - 4h^2}}{2} \end{cases}$.

El problema tindrà solució si $a^2 - 4h^2 \geq 0$.

3.- La figura adjunta mostra 3 quadrats: el costat del major $\overline{AB}=1$. Els altres quadrats tenen per costats $\overline{AC}=x$, $\overline{DE}=y$.
Al moure D sobre el costat $\overline{AB}$ varien les distàncies x, y.
Determineu x i y a fi que el valor de l'expressió $x^2+y^2$ siga mínim.
Oposicions Madrid 2006.




Solució:




Siga $z=\overline{BD}$, aleshores per simetria, $\overline{AR}=z$.

Els triangles $\overset{\Delta}{RQP}$, $\overset{\Delta}{PCD}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{z}{1-z}=\frac{z-x}{x}.$$

Aïllant x: $x=z-z^2$. Elevant al quadrat:

$$x^2=(z-z^2)^2=z^4-2z^3+z^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{DBE}$:

$$y^2=z^2+(1-z)^2=2z^2-2z+1.$$

$$x^2+y^2=\left(z^4-2z^3+z^2\right)+\left(2z^2-2z+1\right)=z^4-2z^3+3z^2-2z+1.$$

Considerem la funció:

$$f(z)=z^4-2z^3+3z^2-2z+1.$$

$$f'(z)=4z^3-6z^2+6z-2.$$

$f'(z)=0$ si i només si $z=\frac{1}{2}$.

$$f''(z)=12z^2-12z+6.$$

$f''\left(\frac{1}{2}\right)=3>0$. Aleshores, $z=\frac{1}{2}$ és un mínim de la funció $f(x)$.

Per tant: $\begin{cases} y^2=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2} \\ x=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \end{cases}$.

Aleshores, $\begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

4.-
a) Determineu el lloc geomètric dels punts del plànol el producte de distàncies dels quals a dos punts fixos F i F’ situats entre si a una distància 2a, és constant i igual a $a^2$.
Identifiqueu la corba.
b) Calculeu l’àrea del recinte afitat per la corba anterior.
Oposicions Extremadura 2006.

Solució:
Siga $F(a,0)$, $F'(-a,0)$.
Siga $P(x,y)$ un punt del lloc geomètric.

$d(P,F)\cdot d(P,F') = a^2$.

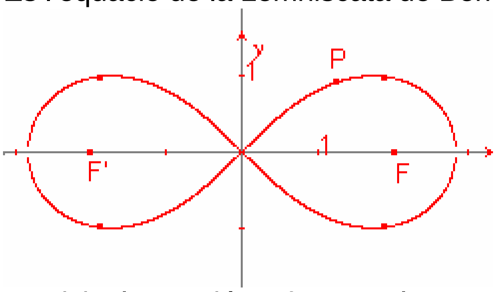
$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+a)^2+y^2} = a^2$.

Elevant al quadrat:

$\left((x-a)^2+y^2\right)\left((x-a)^2+y^2\right) = a^4$.

$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$

És l’equació de la Lemniscata de Bernoulli.




Escrivim l’equació en forma polar:
Efectuem el canvi $x = \rho\cdot\cos\theta$, $y = \rho\cdot\sin\theta$.

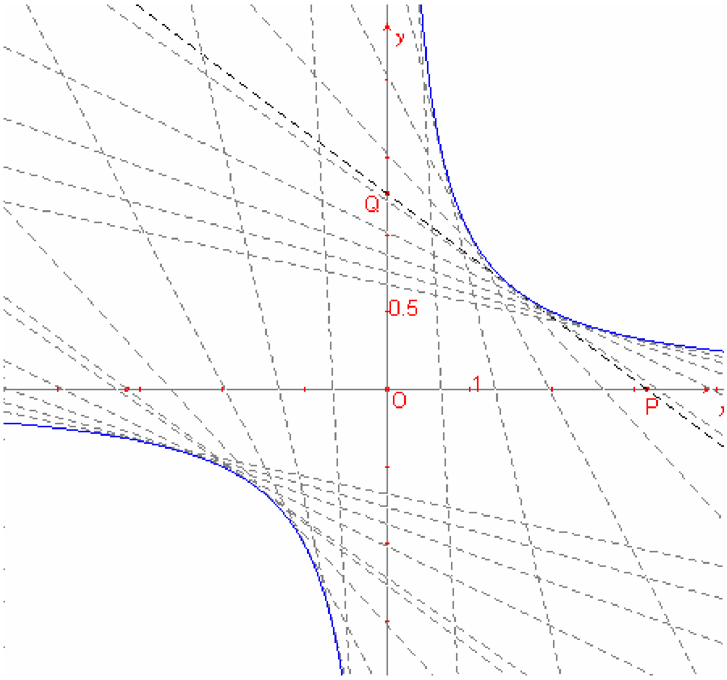
$\rho^4 - 2a^2\rho^2\cos 2\theta = 0$.

$\rho^2 = 2a^2\cdot\cos 2\theta$.

L’àrea del recinte afitat per la corba és:

$$4\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2\cos 2\theta\, d\theta\right) = 4a^2\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Bigg]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2.$$

5.- Determineu l'envolupant de la família de rectes que formen amb els eixos coordenats triangles d'àrea constant S.
Oposicions de Castella la Manxa 2006.




Siga la recta que passa pels punts P(a,0) , Q(0,P) una recta de l'envolupant.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és S.

Aleshores: $ab = 2S$.

Aquesta recta té equació $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

$$=\frac{x}{a}+\frac{a}{2S}y=1$$

Siga $f(x,y,a)=\frac{x}{a}+\frac{a}{2S}y-1$

La corba envolupant acompleix:

$$\begin{cases} f(x,y,a)=0 \\ \frac{d}{da}f(x,y,a)=0 \end{cases}. \qquad \begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{a}{2S}y-1=0 \\ -\frac{x}{a^2}+\frac{y}{2S}=0 \end{cases}$$

Aïllant a de la segona equació: $a=\sqrt{2S\frac{x}{y}}$.

Substituint en la primera equació: $\frac{x}{\sqrt{2S\frac{x}{y}}}+\frac{\sqrt{2S\frac{x}{y}}}{2S}-1=0$

$$2\sqrt{\frac{xy}{2S}}=1.$$

Elevant al quadrat:

$$xy=\frac{S}{2}.$$

6.- Es considera un segment $\overline{AB}$ de longitud constant que es mou recolzant els seus extrems en uns eixos coordenats rectangulars.
Determineu el lloc geomètric de la projecció de l'origen de coordenades sobre el segment.
Oposicions Andalusia 2006.

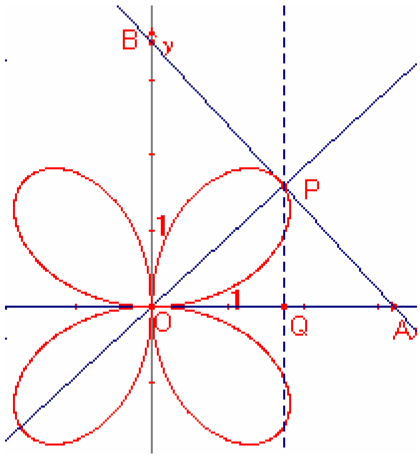
Solució:

Siguen el segment $\overline{AB}$, $A(a,0)$, $B(0,b)$ tal que $a^2+b^2=d^2$, d constant.

Siga P(x,y) el punt projecció de l'origen O(0,0) sobre el segment $\overline{AB}$.
Siga Q la projecció de P sobre l'eix d'abscisses.

Els triangles $\overset{?}{BOA}$, $\overset{?}{AQP}$ són semblants. Aplicant el Teorema de Tales:

$\frac{x}{y}=\frac{b}{a}$.




Elevant al quadrat:

$\frac{x^2}{y^2}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{d^2-a^2}{a^2}$. Aïllant $a^2$:

$$a^2=\frac{d^2y^2}{x^2+y^2} \qquad (1)$$

La recta r que passa per A, B té equació: $r\equiv y=-\frac{b}{a}x+b$.

La recta s perpendicular a la recta r que passa per O té equació:

$s\equiv r=\frac{a}{b}x$.

El punt P és la intersecció de les rectes r, s.

$\begin{cases} y=-\frac{b}{a}x+b \\ y=\frac{a}{b}x \end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases} x=\frac{ab^2}{d^2} \\ y=\frac{a^2b}{d^2} \end{cases}$.

Les coordenades de P són $P\left(\frac{ab^2}{d^2},\frac{a^2b}{d^2}\right)$, en particular: $x=\frac{ab^2}{d^2}=\frac{a(d^2-a^2)}{d^2}$.

Elevant al quadrat:

$$x^2=\frac{a^2(d^2-a^2)^2}{d^4} \qquad (2)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2):

$$x^2=\frac{\frac{d^2y^2}{x^2+y^2}\left(d^2-\frac{d^2y^2}{x^2+y^2}\right)^2}{d^4}.$$

Simplificant: $(x^2+y^2)^3=d^2x^2y^2$ que és l'equació d'una rosa de 4 pètals.

Determinem la seua equació polar:

Siga $\begin{cases} x=?\cdot\cos ? \\ y=?\cdot\sin ? \end{cases}$. Substituint en l'equació:

$(?^2\cos^2 ?+?^2\sin^2 ?)^3=d^2?^4\cos^2 ?\sin^2 ?$, $?^2=d^2\frac{1}{4}\sin^2 2?$.

$?=\frac{d}{2}\sin 2?$.

7.- En un triangle equilàter s'inscriu un cercle. A continuació s'inscriuen tres cercles tangents exteriors al primer i tangents a dos costats del triangle. A continuació s'inscriuen altres tres cercles als tres cercles anteriors i a dos costats del triangle i així successivament i indefinida.
Determineu la part o proporció de l'àrea del triangle ocupada pels cercles inscrits.
Oposicions Cantàbria 2006.

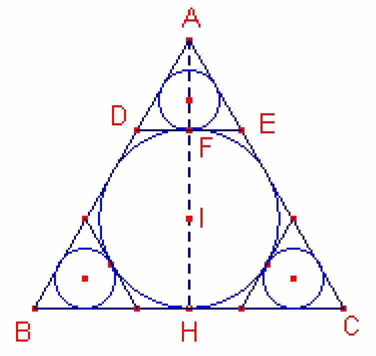
Solució:

Siga $a=\overline{AB}$ el costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores l'altura del triangle equilàter és: $\overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Siga I l'incentre del triangle. L'incentre del triangle equilàter coincideix amb el baricentre i divideix la mitjana en dues parts que estan en proporció 2:1. Aleshores:

$\overline{AI}=\frac{2}{3}\overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$, $\overline{IH}=\frac{1}{3}\overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{6}a$.




Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ADE}$ són semblants, aleshores les seues altures són proporcionals. Calculem la raó de proporcionalitat:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{AH}-2\cdot\overline{IH}}{\overline{AH}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{3}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{1}{3}.$$

Aleshores els radis de les circumferències inscrites als triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ADE}$ són proporcionals i la raó és 3:1.

Siga $r_0=\overline{IH}=\frac{\sqrt{3}}{6}a$ el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

L'àrea del cercle inscrit al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Aleshores:

El radi de la circumferència inscrita a $\overset{\Delta}{ADE}$ és: $r_1=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{6}a$

L'àrea de les tres circumferències és $3\cdot\left(\pi\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2\right)=\frac{1}{9}\pi\frac{1}{4}a^2$.

El radi de la segona iteració és: $r_2=\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{6}a$

L'àrea de les tres circumferències és $3\cdot\left(\pi\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2\right)=\left(\frac{1}{9}\right)^2\pi\frac{1}{4}a^2$.

El radi de la n-èsima iteració és: $r_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\frac{\sqrt{3}}{6}a$

L'àrea de les tres circumferències és $3\cdot\left(\pi\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2\right)=\left(\frac{1}{9}\right)^n\pi\frac{1}{4}a^2$.

La suma de les àrees de les circumferències de n iteracions és:

$$S_n=\frac{1}{12}\pi a^2+\left(\frac{1}{9}\frac{\pi}{4}a^2+\left(\frac{1}{9}\right)^2\frac{\pi}{4}a^2+\left(\frac{1}{9}\right)^3\frac{\pi}{4}a^2+....+\left(\frac{1}{9}\right)^n\frac{\pi}{4}a^2\right)=$$

$$=\frac{1}{12}\pi a^2+\left(\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{9}\right)^3+....+\left(\frac{1}{9}\right)^n\right)\frac{\pi}{4}a^2=$$

$$=\frac{1}{12}\pi a^2+\left(\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}-\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}-1}\right)\frac{\pi}{4}a^2.$$

La suma de les infinites àrees és:

$$S=\frac{1}{12}\pi a^2+\frac{1}{8}\frac{\pi}{4}a^2=\frac{11}{96}\pi a^2.$$

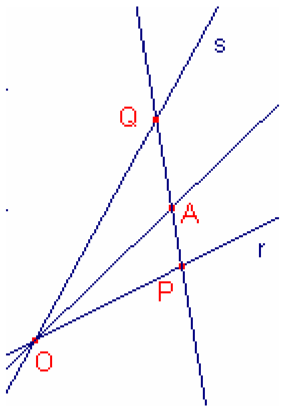
La proporció de l'àrea del triangle ocupada pels cercles inscrits és:

$$\frac{\frac{11}{96}\pi a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}=\frac{11\sqrt{3}\pi}{72}.$$

8.- Siguen dues rectes r i s secants en O, formant un angle $\alpha$. Sobre la bisectriu de l'angle s'agafa un punt A, pel qual es traça una recta variable que talla a la recta r en P i a la recta s en Q. Siga $x=\overline{OP}$, $y=\overline{OQ}$.

a) Demostreu que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ és constant.

b) Calculeu x i y a fi que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ siga igual a una quantitat donada.
Oposicions Astúries 2006.




Solució:
a)
Siga $d=\overline{OA}$ constant.

Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$.

Aplicant la fórmula trigonomètrica l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és:
$$S=\frac{xy\cdot\sin\alpha}{2}.$$

Aleshores, $xy=\frac{2S}{\sin\alpha}$ (1)

l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és igual a la suma de les àrees del triangle $\overset{\Delta}{OPA}$, $\overset{\Delta}{OPQ}$:
$$S=\frac{xd\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{2}+\frac{yd\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{2}=\frac{d\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{2}(x+y).$$

Aleshores, $x+y=\frac{2S}{d\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}$ (2)

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{\frac{2S}{d\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}}{\frac{2S}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{d\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{d}.$$ Aleshores, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ és constant.

b)

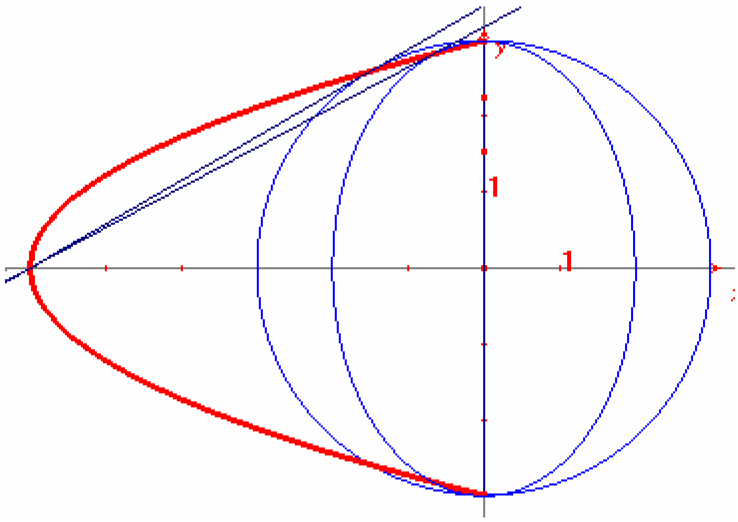
Considerem el sistema format per les expressions (1), (2): $\begin{cases} xy=\frac{2S}{\sin\alpha} \\ x+y=\frac{2S}{d\cdot\sin\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$

Per tant: $\begin{cases} x=\frac{S}{d\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{\frac{S^2}{d^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{2S}{\sin\alpha}} \\ y=\frac{S}{d\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}-\sqrt{\frac{S^2}{d^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{2S}{\sin\alpha}} \end{cases}$, $\begin{cases} x=\frac{S}{d\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}-\sqrt{\frac{S^2}{d^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{2S}{\sin\alpha}} \\ y=\frac{S}{d\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{\frac{S^2}{d^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{2S}{\sin\alpha}} \end{cases}$.

9.- Determineu el lloc geomètric dels punts de contacte de les tangents traçades pel punt $P(-6,0)$ a la família d'el·lipse que tenen per simieixos a, $b=3$.

Representeu el lloc geomètric.

Oposicions Castella Lleó 2006.




Solució:

La família d'el·lipses té per equació:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3^2}=1.$$

Siga la recta que passa pel punt $P(-6,0)$ i té pendent m:

$$y=m(x+6).$$

Determinem m a fi que la recta siga tangent a l'el·lipse. Resoldrem el sistema format per la recta i l'el·lipse el qual ha de tenir solució única.

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3^2}=1\\ y=m(x+6)\end{cases}\qquad (1)$$

Substituint la segona equació en la primera:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2(x+6)^2}{3^2}=1$$

Simplificant:

$$(9+a^2m^2)x^2+12a^2m^2x+36a^2m^2-9a^2=0\quad (1)$$

Per a tenir solució única el discriminant de l'equació ha de ser zero:

$144a^4m^4-36(9+a^2m^2)(4a^2m^2-a^2)=0$. Simplificant:

$$36a^2m^2-9a^2-a^4m^2=0.$$

$$36m^2-9-a^2m^2=0$$

$$a^2=\frac{9(4m^2-1)}{m^2}\qquad \text{Notem que } m\geq\frac{1}{2} \text{ o bé } m\leq-\frac{1}{2}$$

En aquest cas la solució de l'equació (1) és:

$$x=\frac{-12a^2m^2}{2(9+a^2m^2)}=\frac{-12m^2+3}{2m^2}\qquad (2)$$

Aïllem $m^2$ de l'equació (2):

$$m^2=\frac{3}{2(x+6)}.$$

Elevem al quadrat la segona equació del sistema:

$$y^2=m^2(x+6)^2\qquad (3)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (3):

$$y^2=\frac{3}{2(x+6)}(x+6)^2.$$

Aleshores el lloc geomètric és la paràbola:

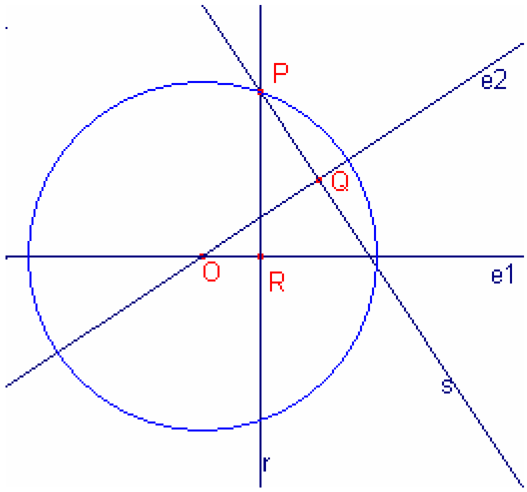
$$y^2=\frac{3}{2}(x+6)\ \text{ quan }\ x\in[-6,0].$$

10.- Siguen R i Q les projeccions ortogonals d'un punt P del plànol sobre dues rectes $e_1, e_2$ que formen un angle $\alpha$.

a) Determineu les equacions del lloc geomètric que descriu P si el segment $\overline{RQ}$ és de longitud constant.

b) Particularitzeu per al cas en què $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Oposicions d'Andalusia 2002.




Solució:
a)

Suposem que l'angle $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, siga $tg\alpha = m$.

Suposem que $e_1 \equiv y = 0$, $e_2 \equiv y = mx$, $m \neq 0$
Siga $R(a,0)$ de la recta $e_1$. Siga $Q(b, mb)$ de la recta $e_2$.
Suposem $\overline{RS} = d$ constant.
Aleshores, $(b-a)^2 + m^2b^2 = d^2$ (1)

Determinem les coordenades del punt P.
R és la projecció de P sobre $e_1$, aleshores P està sobre la recta perpendicular a $e_1$ que passa per R.
Aquesta recta té equació: $r \equiv x = a$
Q és la projecció de P sobre $e_2$, aleshores P està sobre la recta perpendicular a $e_2$ que passa per Q.
Aquesta recta té equació: $s \equiv y - mb = \frac{-1}{m}(x-b)$.
P és la intersecció de r i s:

$$\begin{cases} x = a \\ y - mb = \dfrac{-1}{m}(x-b) \end{cases}$$

. Resolent el sistema, les coordenades de P són:

$P\left(a, mb - \frac{1}{m}(a-b)\right)$. Siga $y = mb - \frac{1}{m}(a-b)$ (2)

De la relació (1) aïllem b:

$$b = \frac{a \pm \sqrt{d^2 - m^2a^2 + m^2d^2}}{1+m^2} \quad (3)$$

Substituint l'expressió (3) en l'expressió (2):

$$y = \frac{m^2+1}{m}\left(\frac{a \pm \sqrt{d^2 - m^2a^2 + m^2d^2}}{1+m^2}\right) - \frac{a}{m}$$ simplificant:

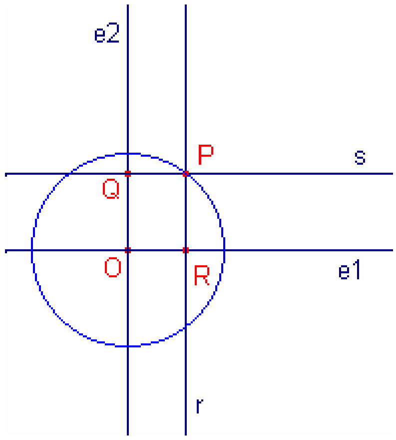
$$y = \frac{1}{m}\left(\pm\sqrt{d^2 - m^2a^2 + m^2d^2}\right)$$. Elevant al quadrat i simplificant:

$$a^2 + y^2 = \left(\frac{d\sqrt{1+m^2}}{m}\right)^2$$ que és l'equació d'una circumferència de centre $(0,0)$

intersecció de les rectes $e_1$, $e_2$, i radi $\frac{d\sqrt{1+m^2}}{m}$.

b)

Suposem que l'angle de les rectes $e_1$, $e_2$, és $\alpha = \frac{\pi}{2}$,




Suposem que $e_1 \equiv y = 0$, $e_2 \equiv x = 0$.

Siga $R(a,0)$ de la recta $e_1$. Siga $Q(0,b)$ de la recta $e_2$.

Suposem $\overline{RS} = d$ constant.

Aleshores, $a^2 + b^2 = d^2$ (1)

R és la projecció de P sobre $e_1$, aleshores P està sobre la recta perpendicular a $e_1$ que passa per R.

Aquesta recta té equació: $r \equiv x = a$

Q és la projecció de P sobre $e_2$, aleshores P està sobre la recta perpendicular a $e_2$ que passa per Q.

Aquesta recta té equació: $s \equiv y = b$.

les coordenades de P són:

$P(a,b)$. Tal que $a^2 + b^2 = d^2$ és l'equació d'una circumferència de centre $(0,0)$ intersecció de les rectes $e_1$, $e_2$, i radi d.