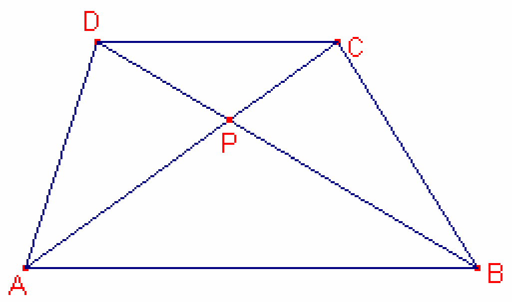
1.- En un trapezi ABCD, $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ paral·lels les diagonals $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ s'intersecten en el punt P. Proveu que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PBC}$ és mitjana proporcional entre les àrees dels triangle $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{PCD}$.



Solució:

Els triangle $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{PCD}$ són semblants ja que
$\angle CDB = \angle DBA$, $\angle CDB = \angle CAB$, $\angle CPD = \angle APB$.

Siga h_1 l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$ sobre el costat $\overline{AB}$.

Siga h_2 l'altura del triangle $\overset{\Delta}{PCD}$ sobre el costat $\overline{CD}$.

Aplicant el teorema de Tales als triangle $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{PCD}$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{PCD}$, $\overset{\Delta}{BCD}$ tenen la mateixa base les àrees són proporcionals a les altures:

$$\frac{S_{BCD}}{S_{PCD}} = \frac{h_1 + h_2}{h_2}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ tenen la mateixa base les àrees són proporcionals a les altures:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABP}} = \frac{h_1 + h_2}{h_1}.$$

$S_{PBC} = S_{DCB} - S_{PCD}$.

Dividint per S_{PCD}

$$\frac{S_{PBC}}{S_{PCD}} = \frac{S_{DCB}}{S_{PCD}} - 1 = \frac{h_1 + h_2}{h_2} - 1 = \frac{h_1}{h_2}.$$

$S_{PBC} = S_{ABC} - S_{ABP}$.

Dividint per S_{ABP}

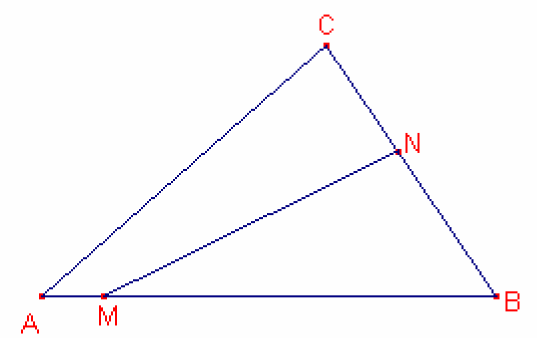
$$\frac{S_{PBC}}{S_{ABP}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABP}} - 1 = \frac{h_1 + h_2}{h_1} - 1 = \frac{h_2}{h_1}.$$

Aleshores,

$\frac{S_{PBC}}{S_{PCD}} = \frac{S_{ABP}}{S_{PBC}}$, és a dir, l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PBC}$ és mitjana proporcional entre les àrees dels triangle $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{PCD}$.

2.- Donat un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ traceu una secant que talle $\overline{AB}$ en M i a $\overline{BC}$ en N de manera que el quadrilàter AMNC i el triangle $\overset{\Delta}{BMN}$ tinguen el mateix perímetre i la mateixa àrea.

Solució:



Siga el punt M de $\overline{AB}$, $\overline{AM} = \alpha c$, $0 \le \alpha \le 1$.
Siga el punt N de $\overline{BC}$, $\overline{BN} = \beta a$, $0 \le \beta \le 1$.

Si el quadrilàter AMNC i el triangle $\overset{\Delta}{BMN}$ tenen el mateix perímetre:

$\overline{AC} + \overline{CN} + \overline{AM} = \overline{MB} + \overline{BN}$.

$b + \alpha c + (1-\beta) = (1-\alpha)c + \beta a$.

$$2c\alpha - 2a\beta = c - b - a \qquad (1)$$

Si el quadrilàter AMNC i el triangle $\overset{\Delta}{BMN}$ tenen la mateixa àrea, l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BMN}$ és la meitat que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Aplicant la fórmula trigonomètrica:

$\frac{(1-\alpha)ca\beta \cdot \sin B}{2} = \frac{1}{2}\frac{ac \cdot \sin B}{2}$. Simplificant:

$$\beta(1-\alpha) = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Resolent el sistema format per (1) i (2):

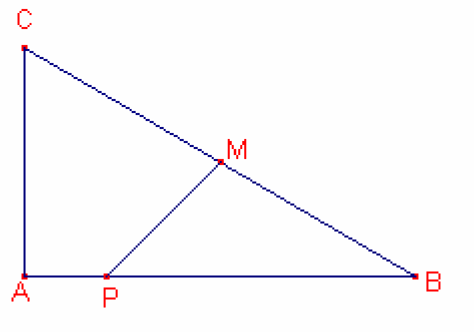
$\begin{cases} 2c\alpha - 2a\beta = c - b - a \\ \beta(1-\alpha) = \frac{1}{2} \end{cases}$. Les solucions són:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{-a-b+3c+\sqrt{(a+b+c)^2-8ac}}{4c} \\ \beta = \frac{a+b+c+\sqrt{(a+b+c)^2-8ac}}{4a} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{-a-b+3c-\sqrt{(a+b+c)^2-8ac}}{4c} \\ \beta = \frac{a+b+c-\sqrt{(a+b+c)^2-8ac}}{4a} \end{cases}$$

El problema té solució si $0 \le \alpha \le 1$, $0 \le \beta \le 1$.

3.- Pel punt mig de la hipotenusa d'un triangle rectangle és traça una recta que talla el catet major amb un angle de 45º. Calculeu en funció de la hipotenusa, la suma dels quadrats dels segments determinats d'aquesta forma en el catet.

Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{o}$, suposem $c \geq b$.
Siga M el punt mig de la hipotenusa.
Siga P el punt del costat $\overline{AB}$ tal que $\angle MPB = 45^{o}$.
Volem calcular el valors de $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ en funció de la hipotenusa.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{PBM}$:

$$\frac{\overline{BP}}{\sin(45^{o}+B)} = \frac{\frac{a}{2}}{\sin 45^{o}}.$$

$$\overline{BP} = \frac{a}{2}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos B + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin B}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{2}\left(\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\right) = \frac{b+c}{2}$$

Aleshores, $\overline{AP} = c - \frac{b+c}{2} = \frac{c-b}{2}$.

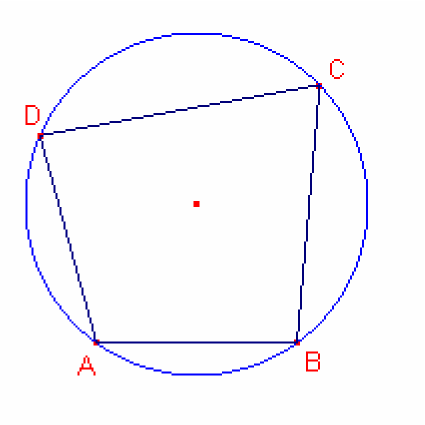
$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

4.- Construir el quadrilàter inscriptible coneguts els costats: $p=\overline{AB}$, $q=\overline{BC}$, $r=\overline{CD}$, $s=\overline{DA}$.

Solució:
El problema quedarà determinat si coneguem una de les dues diagonals, aleshores podrem construir un triangle coneguts els tres costats.

Pel teorema de Tolomeu
Els angles oposats d'un quadrilàter inscriptible són suplementaris.

Siga $x=\overline{AC}$, $y=\overline{BD}$.
Siga $\alpha=\angle ABC$. Pel teorema de Tolomeu, $\angle ADC=180^{o}-\alpha$.



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$x^2=p^2+q^2-2pq\cdot\cos\alpha \qquad (1)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

$$x^2=p^2+q^2-2pq\cdot\cos(180^{o}-\alpha)$$

$$x^2=p^2+q^2+2pq\cdot\cos\alpha \qquad (2)$$

Restant les expressions (1) i (2):

$$\cos\alpha=\frac{p^2+q^2-r^2-s^2}{2(rs+pq)} \qquad (3)$$

Substituint l'expressió (3) en l'expressió (1):

$$x^2=p^2+q^2-2pq\cdot\frac{p^2+q^2-r^2-s^2}{2(rs+pq)}$$

Anàlogament podríem calcular el valor de la diagonal y aplicant el teorema del cosinus als triangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{BCD}$.

O bé utilitzant el teorema de Tolomeu que diu:
En un quadrilàter inscriptible ABCD $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$:

$pr+qs=xy$

$$x^2=p^2+q^2-pq\cdot\frac{p^2+q^2-r^2-s^2}{rs+pq}$$

$$x^2=\frac{rs}{rs+pq}\left(p^2+q^2\right)+\frac{pq}{rs+pq}\left(r^2+s^2\right)$$

$$x^2=\frac{rsp^2+rsq^2+pqr^2+pqs^2}{rs+pq}$$

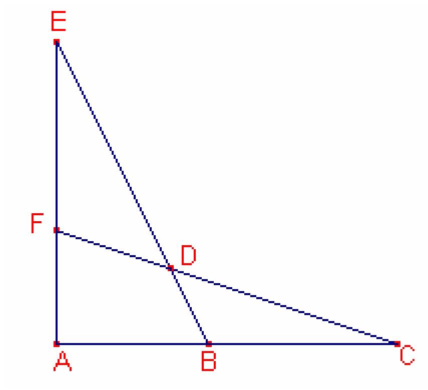
$$x^2=\frac{(pr+qs)(ps+qr)}{rs+pq}$$

$$x^2=\frac{xy(ps+qr)}{rs+pq}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{ps+qr}{rs+pq}$$

$$y^2=\frac{(pr+qs)(pq+rs)}{ps+qr}.$$

5.- En la figura adjunta, $\overline{AE}$ i $\overline{AC}$ són perpendiculars. $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=18$, $\overline{AE}=16$ i $\overline{AF}=6$. Determineu l'àrea del quadrilàter ABDF.
Concurs de primavera 2004.



Solució:

Siga S_1 l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BDF}$.

Siga S_2 l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$.

Siga S_3 l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$.

Siga S_4 l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CDE}$.

$S_{ABF}=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AF}}{2}=24$, $S_{ACE}=\dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{AE}}{2}=144$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABF}$, $\overset{\Delta}{BCF}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$\frac{S_1+S_2}{S_{ABF}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}},\quad \frac{S_1+S_2}{24}=\frac{10}{8},\qquad S_1+S_2=30 \qquad (1)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABF}$, $\overset{\Delta}{DEF}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$\frac{S_1+S_3}{S_{ABF}}=\frac{\overline{FE}}{\overline{AF}},\quad \frac{S_1+S_3}{24}=\frac{10}{6},\qquad S_1+S_3=40 \qquad (2)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{CDE}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$\frac{S_2}{S_4}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DE}} \qquad (3)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{BCF}$, $\overset{\Delta}{DEF}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$\frac{S_1}{S_3}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DE}} \qquad (4)$$

Igualant les expressions (3) i (4):

$$\frac{S_2}{S_4}=\frac{S_1}{S_3},\qquad S_1\cdot S_4=S_2\cdot S_3 \qquad (5)$$

Calculem l'àrea del triangle S_{ACE}

$$S_1+S_2+S_3+S_4+S_{ABF}=S_{ACE},\quad S_1+S_2+S_3+S_4=120 \qquad (6)$$

Considerem el sistema d'equacions format per les expressions (1), (2), (5) (6)

$$\begin{cases} S_1+S_2=30 \\ S_1+S_3=40 \\ S_1\cdot S_4=S_2\cdot S_3 \\ S_1+S_2+S_3+S_4=120 \end{cases} \text{ la solució del qual és: } \begin{cases} S_1=10 \\ S_2=30 \\ S_3=30 \\ S_4=60 \end{cases}$$

L'àrea del quadrilàter ABDF és:

$S_{ABDF}=S_{ABF}+S_1=24+10=34$.

6.- Determineu la distància del plànol $\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0$ a la corba d 'equacions
$C \equiv \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + z^2 + 6x + 8z + 23 = 0 \end{cases}$.
Oposicions Àvila 1998.

Solució:
$x^2 + z^2 + 6x + 8z + 23 = 0$ és equivalent a l'equació $(x+3)^2 + (z+4)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$
L'equació d'un cilindre perpendicular al plànol $y = 0$.
La corba $C \equiv \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + z^2 + 6x + 8z + 23 = 0 \end{cases}$ és la circumferència de centre $O(-3,0,-4)$ i de radi $r = \sqrt{2}$.
$d(C,\pi) = \text{mín } \{d(P,\pi)\}$ tal que P pertany a la circumferència C.

L'equació paramètrica de la circumferència C és:
$$C \equiv \begin{cases} x = -3 + \sqrt{2}\cos\alpha \\ y = o \\ z = -4 + \sqrt{2}\sin\alpha \end{cases} \qquad \alpha \in [0, 2\pi[$$
Un punt P de la circumferència té coordenades, $P(-3 + \sqrt{2}\cos\alpha, 0, -4 + \sqrt{2}\sin\alpha)$.
$$d(P,\pi) = \left| \frac{-3 + \sqrt{2}\cos\alpha - 0 - 4 + \sqrt{2}\sin\alpha - 2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{6}} \left| \sqrt{2}(\sin\alpha + \cos\alpha) - 9 \right| =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \left| \sqrt{2}\left(\sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) - 9 \right| =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \left| \sqrt{2} \cdot 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) - 9 \right| =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \left| 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) - 9 \right| =$$
Notem que $2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) - 9 \le 2 - 9 < 0$.
$$d(P,\pi) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(9 - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \right).$$
Considerem la funció: $f(\alpha) = 9 - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$, $\alpha \in [0, 2\pi[$.
Determinem el mínim de la funció:
$$f'(\alpha) = 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right), \quad f'(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$
$f''(\alpha) = 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$, $f''\left(\frac{\pi}{4} \right) = 2 > 0$, $f''\left(\frac{3\pi}{4} \right) = -2 < 0$. Aleshores el mínim de la funció és $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
La distància mínima és: $d = \frac{1}{\sqrt{6}}(9 - 2\cos 0) = \frac{7}{6}\sqrt{6}$.

7.- En un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $C=90^o$, siga $\overline{CD}$ una altura.

Els cercles de centres P, Q, I estan inscrits en els triangles $\overset{\Delta}{ACD}$, $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{ABC}$, respectivament.

Demostreu que el segment $\overline{PQ}$ és igual al segment $\overline{CI}$ i és perpendicular a ell.

Barroso 353

Solució:

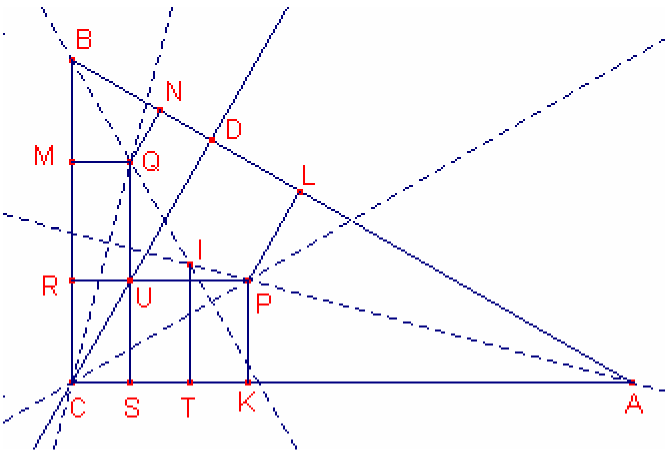
Els triangles $\overset{\Delta}{ACD}$, $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són rectangles i semblants.

En un triangle rectangle el radi de la circumferència inscrita és igual al semiperímetre menys la hipotenusa.

Siga $r=\overline{IT}=\overline{CT}$ el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga $m=\overline{PK}=\overline{PL}$ el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$.

Siga $n=\overline{QM}=\overline{QN}$ el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$.



$$r=\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{a+b-c}{2}.$$

$$m=\frac{\overline{CD}+\overline{AD}-b}{2}.$$

$$n=\frac{\overline{CD}+\overline{BD}-a}{2}.$$

Per ser K punt de tangència de la circumferència inscrita del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$:

$$\overline{CK}=\frac{b+\overline{CD}+\overline{AD}}{2}-\overline{AD}=\frac{b+\overline{CD}-\overline{AD}}{2}.$$

Per ser M punt de tangència de la circumferència inscrita del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$:

$$\overline{CM}=\frac{a+\overline{CD}+\overline{BD}}{2}-\overline{BD}=\frac{a+\overline{CD}-\overline{BD}}{2}.$$

Siga R la projecció de P sobre el costat a. Siga S la projecció del Q sobre el costat b.

Siga U la intersecció dels segments $\overline{PR}$, $\overline{QS}$.

Provem que $\overline{PU}=\overline{KS}=r$ i que $\overline{QU}=\overline{MR}=r$.

$$\overline{PU}=\overline{KS}=\overline{CK}-\overline{CS}=\overline{CK}-n=\frac{b+\overline{CD}-\overline{AD}}{2}-\frac{\overline{CD}+\overline{BD}-a}{2}=\frac{a+b-c}{2}=r$$

$$\overline{QU}=\overline{MR}=\overline{CM}-\overline{CR}=\overline{CM}-m=\frac{a+\overline{CD}-\overline{BD}}{2}-\frac{\overline{CD}+\overline{AD}-a}{2}=\frac{a+b-c}{2}=r$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PUQ}$, $\overset{\Delta}{CTI}$ tenen els catets iguals i els catets corresponents perpendiculars aleshores les hipotenuses són iguals i perpendiculars, és a dir, $\overline{PQ}=\overline{CI}$ i perpendiculars.

8.- Siguen T i T' dos triangles rectangles distints, d'hipotenusa a, a' i catets b, c i b', c' respectivament. Proveu que $aa'(bc'+b'c)=aab'c'+a'a'bc$ si i només si els triangles T i T' són semblants.
Barroso 352

Solució:
$(\Leftarrow)$
Suposem els triangles T i T' semblants aleshores:
$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c},\quad b'=a'\frac{b}{a}\qquad (1)$$

$aa'(bc'+b'c)=aab'c'+a'a'bc$ aquesta igualtat és certa si i només si:
$$\frac{aa'(bc'+b'c)}{aaaa}=\frac{aab'c'+a'a'bc}{aaaa}\qquad\Leftrightarrow$$

$$\frac{a'}{a}\left(\frac{b}{a}\frac{c'}{a}+\frac{b'}{a}\frac{c}{a}\right)=\frac{b'}{a}\frac{c'}{a}+\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}\frac{b}{a}\frac{c}{a}\qquad\Leftrightarrow$$
$$\frac{a'}{a}\frac{b}{a}\frac{c'}{a}+\frac{a'}{a}\frac{b'}{a}\frac{c}{a}=\frac{b'}{a}\frac{c'}{a}+\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}\frac{b}{a}\frac{c}{a}\qquad\Leftrightarrow$$
Aplicant les relacions (1):
$$\frac{b'}{b}\frac{b}{a}\frac{c'}{a}+\frac{a'}{a}\frac{a'\frac{b}{a}}{a}\frac{c}{a}=\frac{b'}{a}\frac{c'}{a}+\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}\frac{b}{a}\frac{c}{a}\qquad\Leftrightarrow$$
$$\frac{b'}{a}\frac{c'}{a}+\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}\frac{b}{a}\frac{c}{a}=\frac{b'}{a}\frac{c'}{a}+\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}\frac{b}{a}\frac{c}{a}.$$ La qual cosa és certa.

$(\Rightarrow)$
Suposem que $aa'(bc'+b'c)=aab'c'+a'a'bc$ i els triangles T i T' són rectangles:
Aleshores:
$$aa'bc'+aa'b'c=aab'c'+a'a'bc$$
$$aa'bc'-aab'c'+aa'b'c-a'a'bc=0$$
$$ac'(a'b-ab')+a'c(ab'-a'b)=0$$
$$(ac'-a'c)(a'b-ab')=0$$

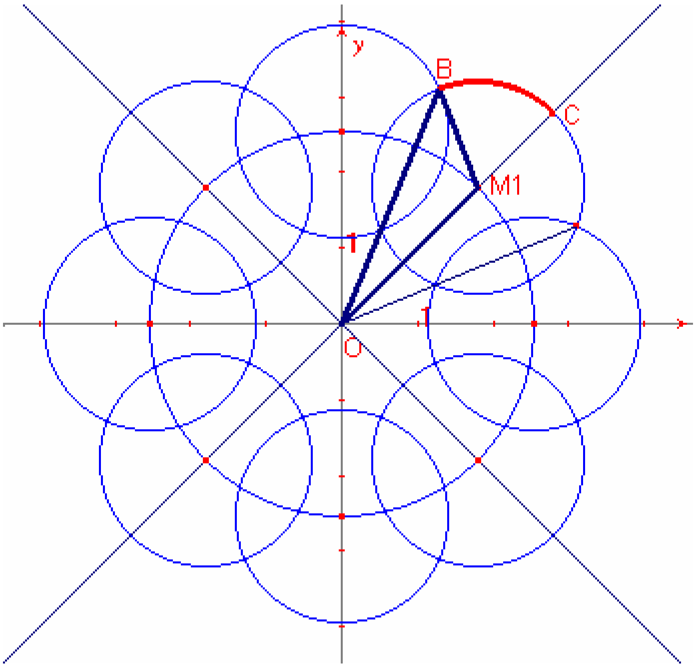
Aleshores $ac'-a'c=0$ o bé $a'b-ab'=0$

Si $ac'-a'c=0$, $\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}$ i per ser els dos triangles rectangles T i T' són semblants.

Si $a'b-ab'=0$, $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ per ser els dos triangles rectangles T i T' són semblants.

9.- Considerem una circumferència de radi R.
Aquesta circumferència es divideix en n parts iguals mitjançant els punts $M_1, M_2, \ldots M_n$.
Cadascun d'aquests punts s'agafa con centre per traçar un arc de circumferència de radi r. suposant un valor de n suficientment gran, cadascun d'aquests arcs es talla amb el seu traçat des del punt anterior i amb el traçat des del següent formant una línia tancada que envolta la primera circumferència. Calculeu el límit de la longitud de la línia tancada quan el nombre de punts (és a dir n) augmenta indefinidament.
Oposicions Galícia 2006.

Solució:



Observem el dibuix. $\overline{OM_1} = R$, $\overline{M_1B} = r$.
El punt M_1 agafat com a centre determina un arc el doble de l'arc $\overset{\frown}{BC}$.

Calculem la mesura de l'arc $\overset{\frown}{BC}$.

Notem $\angle BAM_1 = \dfrac{\pi}{n}$

Siga $\alpha = \angle OBM_1$.

Aplicant el teorema del sinus al triangle $\overset{\Delta}{OBM_1}$:

$$\frac{r}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{R}{\sin\alpha}.$$ Aleshores,

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{R}{r}\sin\frac{\pi}{n}\right).$$

$$\angle BM_1C = \frac{\pi}{n} + \alpha = \frac{\pi}{n} + \arcsin\left(\frac{R}{r}\sin\frac{\pi}{n}\right).$$

L'arc $\overset{\frown}{BC}$ la seua longitud és: $r \cdot \angle BM_1C = r\left(\frac{\pi}{n} + \arcsin\left(\frac{R}{r}\sin\frac{\pi}{n}\right)\right)$.

La longitud de la línia tancada que envolta la circumferència és:

$$L = 2n\left(r\left(\frac{\pi}{n} + \arcsin\left(\frac{R}{r}\sin\frac{\pi}{n}\right)\right)\right)$$

$$L = 2\pi r + 2nr \cdot \arcsin\left(\frac{R}{r}\sin\frac{\pi}{n}\right)$$

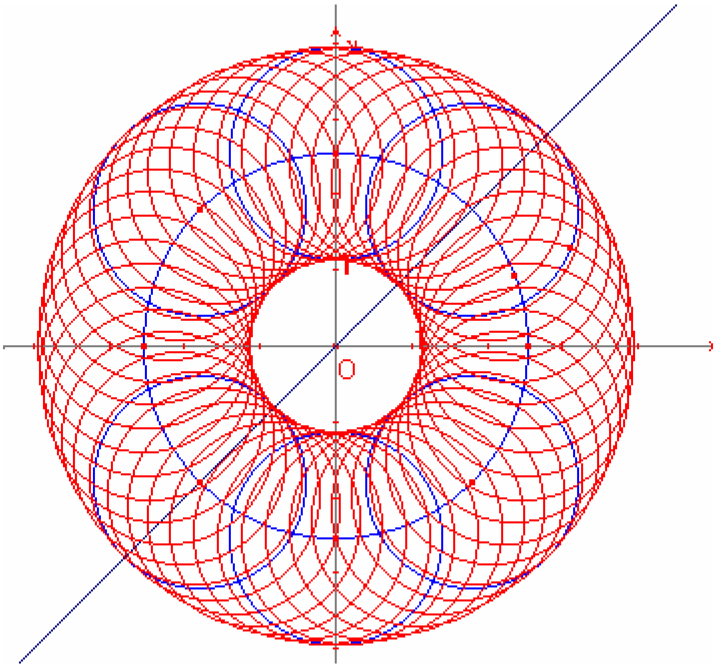
Siga $x = \dfrac{\pi}{n}$. Considerem la funció: $f(x) = 2\pi r + \dfrac{2r\pi}{x}\arcsin\left(\dfrac{R}{r}\sin x\right)$

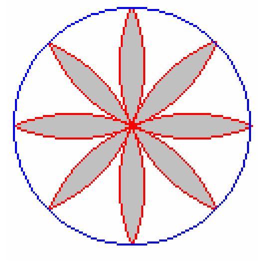
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(2\pi r + \frac{2r\pi}{x}\arcsin\left(\frac{R}{r}\sin x\right)\right) \underset{\text{Hôpital}}{=} 2\pi r + 2r\pi \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{r}\sin x\right)^2}}\dfrac{R}{r}\cos x}{1} =$$

$$= 2\pi(R + r)$$

Aleshores:

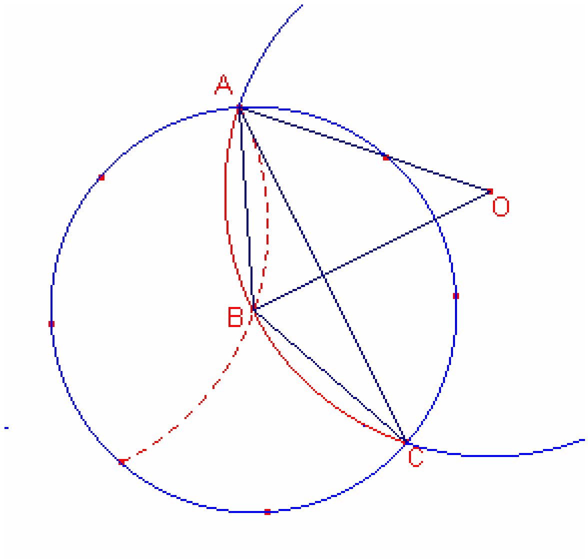
$$\lim_{n\to+\infty} L = \lim_{n\to+\infty}\left(2\pi r + 2nr\cdot \arcsin\left(\frac{R}{r}\sin\frac{\pi}{n}\right)\right) = 2\pi(R+r)\,.$$





10.- Es dibuixen rosetes regulars de n pètals a l'interior d'un cercle $n>2$. Cada arc de cada pètal s'obté al dividir una circumferència en n parts iguals. La figura adjunta mostra el cas $n=8$. Quin és el límit de la fracció de l'àrea del cercle que ocupen les rosetes quan n tendeix cap a infinit?.
Oposicions Astúries 2006.

Solució:



Siga $\overline{BA}=1$ el radi de la circumferència circumscrita a la roseta.
L'àrea del cercle circumscrit a la roseta és π .

Per ser $\angle ABC$ un angle central

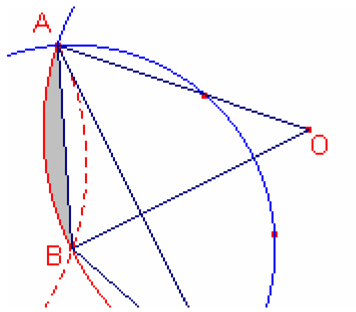
$$\angle ABC=\frac{2\pi}{n}\left(\frac{n}{2}-1\right)=\pi\frac{n-2}{n}$$

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ isòsceles $\angle ACB=\frac{\pi}{n}$.

Aplicant el teorema del sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}=2R$ on R és el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Aleshores $R=\overline{OA}=\dfrac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}$.



Calculem l'àrea de mig pètal que és igual a l'àrea del sector de centre O i arc AB menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABO}$.

Per ser arc central, $\angle AOB=2\cdot\angle ACB=\frac{2\pi}{n}$.

L'àrea del sector és: $R^2\frac{\pi}{n}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABO}$ és: $\frac{1}{2}R^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

L'àrea de la roseta (n pètals):

$$2n\left(R^2\frac{\pi}{n}-\frac{1}{2}R^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)=2n\left(\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)^2\left(\frac{\pi}{n}-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)=\frac{2\pi-n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

La proporció entre l'àrea de la roseta i el cercle és:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{2\pi-n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Calculem el límit quan n s'aproxima cap a infinit:

Si fem el canvi $x=\frac{2\pi}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\pi}\frac{2\pi-n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{4\pi}\frac{2\pi-\frac{2\pi}{x}\sin x}{\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin^2\frac{x}{2}}=$$

És una indeterminació $\frac{0}{0}$ aplicant la regla de l'Hôpital:

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\frac{1-\cos x}{\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x\sin x}=$$

És una indeterminació $\frac{0}{0}$ aplicant la regla de l'Hôpital:

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cdot\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\sin x+\frac{1}{2}x\cdot\cos x}=$$

És una indeterminació $\frac{0}{0}$ aplicant la regla de l'Hôpital:

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\cos x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}x\cdot\sin x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$