

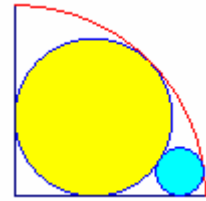
1.- Una circumferència de centre C està inscrita en un quadrant de circumferència de centre O.

Una altra circumferència, de centre Q, és exterior, i tangent, a la circumferència de centre C i interior, i tangent a un dels radis i a l'arc, al quadrant.

Si P és el peu de la perpendicular des de Q a la línia de centres OC,

proveu que $\overline{OQ} + \overline{QP} = 2 \cdot \overline{OP}$.

Oposicions Balears 2006.



Solució:

Siga $\overline{OM} = \overline{ON} = 1$ radi del quadrant de centre O.

Siga $r = \overline{CR} = \overline{CM}$ radi de la circumferència de centre C tangent al quadrant.

Siga $s = \overline{QS} = \overline{QT} = \overline{QN}$.

$\angle MOS = 45^\circ$. Siga $\alpha = \angle QOS$.

$\overline{OQ} = 1 - s$, $\overline{CQ} = r + s$, $\overline{OC} = 1 - r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle ORC$:

$$r = \sqrt{2} - 1.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle OSQ$:

$$OS = \sqrt{1 - 2s}.$$

Aleshores, $\overline{RS} = \overline{OS} - r = \sqrt{1 - 2s} - r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle CXQ$:

$$(r + s)^2 = (r - s)^2 + (\sqrt{1 - 2s} - r)^2$$

Simplificant:

$$2r\sqrt{1 - 2s} = 1 + r^2 - 2s - 4rs$$

Substituint $r = \sqrt{2} - 1$:

$$2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{1 - 2s} = 1 + (\sqrt{2} - 1)^2 - 2s - 4(\sqrt{2} - 1)s$$

$$(-2 + 2\sqrt{2})\sqrt{1 - 2s} = (2 - 4\sqrt{2})s + 4 - 2\sqrt{2}.$$

Elevant al quadrat:

$$(9 - 4\sqrt{2})s^2 + (18 - 14\sqrt{2})s - 2\sqrt{2} + 3 = 0.$$

Resolent l'equació:

$$s = \frac{-1 + 5\sqrt{2}}{49}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle $\triangle OSQ$:

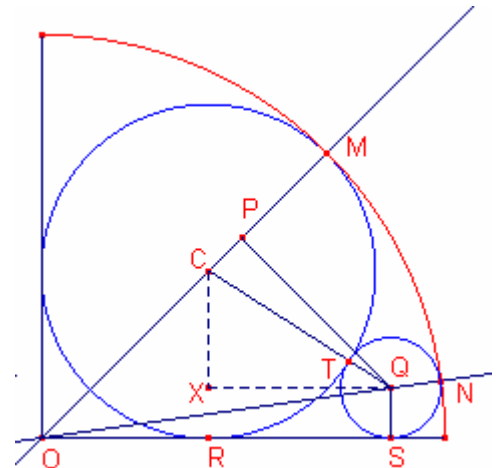
$$\sin \alpha = \frac{s}{1 - s}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{1 - 2s}}{1 - s}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle $\triangle OPQ$:

$$\overline{PQ} = \overline{OQ} \sin(45^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} (-s + \sqrt{1 - 2s}).$$

$$\overline{OP} = \overline{OQ} \cdot \cos(45^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} (+s + \sqrt{1 - 2s}).$$

Substituint $s = \frac{-1 + 5\sqrt{2}}{49}$:



$$\overline{OQ} = 1 - s = 1 - \frac{-1 + 5\sqrt{2}}{49} = \frac{50 - 5\sqrt{2}}{49}.$$

$$\sqrt{1 - 2s} = \sqrt{1 - \frac{-2 + 10\sqrt{2}}{49}} = \frac{-1 + 5\sqrt{2}}{7}.$$

$$\overline{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-s + \sqrt{1 - 2s}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1 - 5\sqrt{2}}{49} + \frac{-1 + 5\sqrt{2}}{7} \right) = \frac{30 - 3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\overline{OQ} + \overline{QP} = \frac{50 - 5\sqrt{2}}{49} + \frac{30 - 3\sqrt{2}}{49} = \frac{80 - 8\sqrt{2}}{49}.$$

$$2 \cdot \overline{OP} = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(s + \sqrt{1 - 2s}) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{-1 + 5\sqrt{2}}{49} + \frac{-1 + 5\sqrt{2}}{7} \right) = \frac{80 - 8\sqrt{2}}{49}.$$

Aleshores:

$$\overline{OQ} + \overline{QP} = 2 \cdot \overline{OP}.$$

2.- Donat el triangle $\triangle ABC$. Siguen les circumferències C_1, C_2 que passen pels punts B, C i intersecten els costats $\overline{AB}, \overline{AC}$ en els punts B', C' (la circumferència C_1) i en els punts B'', C'' (la circumferència C_2). Proveu que els segments $\overline{B'C'}$ i $\overline{B''C''}$ són paral·lels.

Solució:

Els punts B, C, C', B' formen un quadrilàter inscriptible en la circumferència C_1 .

Aplicant el teorema de Tolomeu els angles oposats són suplementaris:

$$\angle B'BC = 180^\circ - \angle B'C'C \quad \text{i} \quad \angle C'CB = 180^\circ - \angle BB'C'.$$

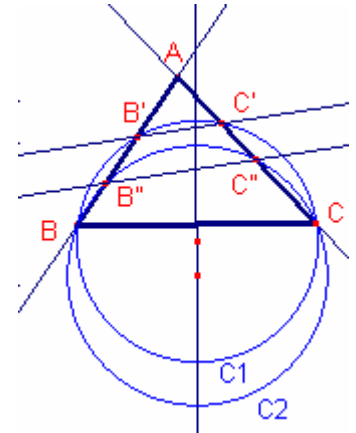
Els punts B, C, C'', B'' formen un quadrilàter inscriptible en la circumferència C_2 .

Aplicant el teorema de Tolomeu els angles oposats són suplementaris:

$$\angle B''BC = 180^\circ - \angle B''C''C \quad \text{i} \quad \angle C''CB = 180^\circ - \angle BB''C''.$$

Aleshores,

$\angle AB'C' = \angle AB''C''$, per tant els segments $\overline{B'C'}$ i $\overline{B''C''}$ són paral·lels.



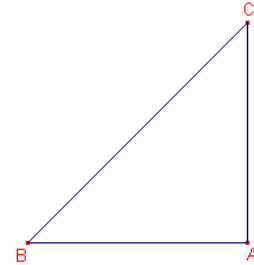
3.- Mitjançant un segment, volem tallar un triangle rectangle isòsceles T, de catets unitaris, en dos polígons que tinguin la mateixa àrea. Trobeu els extrems i la longitud del segment de longitud mínima que divideix el triangle T en dos polígons de la mateixa àrea. Aquest segment, és únic?.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$, $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$.

Suposem P en el catet \overline{AB} .

Siga \overline{PQ} el segment solució del problema. Pot donar-se dos casos: que Q estiga sobre el catet \overline{AC} o que Q estiga sobre la hipotenusa \overline{BC} .



Suposem que Q està sobre el catet \overline{AC} .

Siga $x = \overline{BP}$. Siga $y = \overline{AQ}$

L'àrea del triangle $\triangle PAQ$ és la meitat de l'àrea del triangle

$\triangle ABC$. Aleshores:

$$\frac{(1-x)y}{2} = \frac{1}{4}, \text{ per tant, } y = \frac{1}{2(1-x)}. \text{ Notem que } x \leq \frac{1}{2}.$$

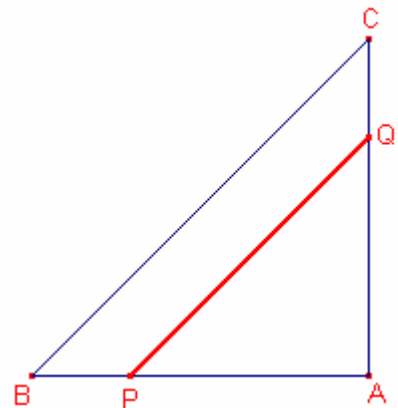
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle PAQ$:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \sqrt{(1-x)^2 + \frac{1}{4(1-x)^2}}$$

Considerem la funció $f(x) = \sqrt{(1-x)^2 + \frac{1}{4(1-x)^2}}$, el mínim

d'aquesta funció s'assoleix en $x = 1 - \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ i el segment

$$\text{mínim és } f\left(1 - \sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Suposem que Q està sobre la hipotenusa \overline{BC} .

Siga $x = \overline{BP}$. Siga $z = \overline{BQ}$. Siga $y = \overline{PQ}$. Siga $h = \overline{QH}$

l'altura del triangle $\triangle BPQ$ sobre la base \overline{BP} .

L'àrea del triangle $\triangle BPQ$ és la meitat de l'àrea del triangle

$\triangle ABC$. Aleshores:

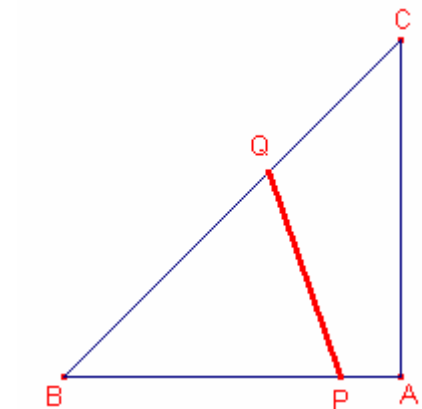
$$\frac{xh}{2} = \frac{1}{4}. \text{ Aleshores, } h = \frac{1}{2x}. \text{ Notem que } x \geq \frac{1}{2}$$

$\angle ABC = 45^\circ$. Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle BHQ$:

$$z = \frac{h}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}h.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle BPQ$:

$$y^2 = x^2 + (\sqrt{2}h)^2 - 2x\sqrt{2}h \cdot \cos 45^\circ$$



$$y^2 = x^2 + 2h^2 - 2xh . \text{ Substituint l'expressió } h = \frac{1}{2x} :$$

$$y^2 = x^2 + \frac{1}{2x^2} - 1$$

$$y = \overline{PQ} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{2x^2} - 1}$$

Considerem la funció: $g(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{2x^2} - 1}$, el mínim d'aquesta funció s'assoleix en

$$x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \text{ i el segment mínim és } g\left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\sqrt{2} - 1}.$$

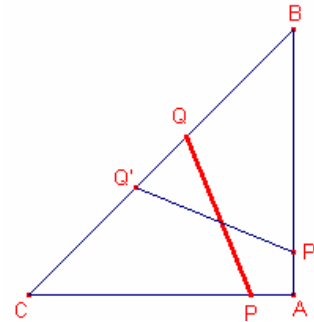
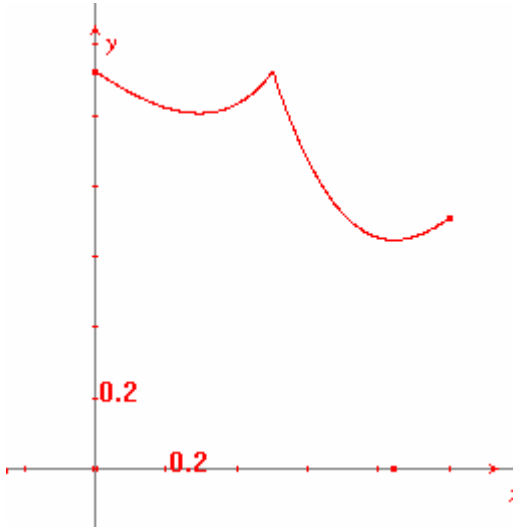
$$\text{Notem que } g\left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\sqrt{2} - 1} > f\left(1 - \sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aleshores el mínim del problema s'assoleix quan Q està sobre la hipotenusa \overline{BC} ,

$$\overline{BP} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \text{ i la mínima distància és } \overline{PQ} = \sqrt{\sqrt{2} - 1}.$$

Podíem haver suposat que P està sobre el catet \overline{AC} i tindria una altra solució anàloga a l'anterior.

La funció al variar P sobre el catet \overline{BA} és:



El primer tros és $f(x)$ i el segon tros és $g(x)$.

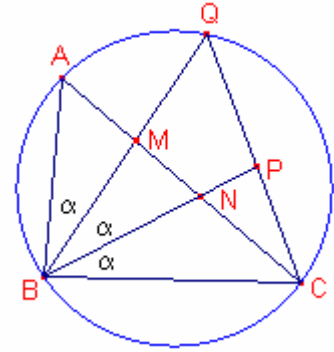
4.- En la figura següent proveu que $\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} = 1$.

Solució 1:

\overline{BM} és bisectriu del triangle $\triangle ABN$. Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\frac{\overline{AM}}{c} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{AN}}{c + \overline{BN}}. \text{ Aleshores,}$$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{c}{c + \overline{BN}} = \frac{1}{1 + \frac{\overline{BN}}{c}}.$$



\overline{BP} és bisectriu del triangle $\triangle QBC$. Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\frac{\overline{CP}}{a} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{CQ}}{a + \overline{BQ}}. \text{ Aleshores,}$$

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} = \frac{a}{a + \overline{BQ}} = \frac{1}{1 + \frac{\overline{BQ}}{a}}.$$

Els triangles $\triangle ABN$, $\triangle QBC$ són semblants ja que $\angle ABN = \angle QBC = 2\alpha$ i per ser inscrits $\angle BAC = \angle BQC$. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BN}}{c} = \frac{a}{\overline{BQ}} = k.$$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} = \frac{1}{1+k} + \frac{1}{1+\frac{1}{k}} = \frac{1}{1+k} + \frac{k}{1+k} = 1.$$

Solució 2:

Per ser inscrits $\angle BAC = \angle BQC = \beta$.

Aplicant el teorema dels sinus als triangles $\triangle ABM$, $\triangle ABN$:

$$\frac{\overline{AM}}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad \frac{\overline{AN}}{\sin 2\alpha} = \frac{c}{\sin(2\alpha + \beta)}. \text{ Dividint les dues expressions:}$$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\sin(2\alpha + \beta)}{2 \cos \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}.$$

Aplicant el teorema dels sinus als triangles $\triangle PBC$, $\triangle QBC$:

$$\frac{\overline{CP}}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad \frac{\overline{CQ}}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{\sin \beta}. \text{ Dividint les dues expressions:}$$

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} = \frac{\sin \beta}{2 \cos \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}.$$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} = \frac{\sin(2\alpha + \beta)}{2 \cos \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)} + \frac{\sin \beta}{2 \cos \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin(2\alpha + \beta) + \sin \beta}{2 \cos \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)} =$$

$$= \frac{2 \sin\left(\frac{2\alpha + 2\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{2\alpha + \beta - \beta}{2}\right)}{2 \cos \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)} = \frac{2 \cos \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2 \cos \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)} = 1.$$

5.- Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$. Siguen P, Q, R els punts simètrics de A, B, C respecte \overline{BC} , \overline{AC} , \overline{AB} respectivament. Calculeu la raó entre les àrees dels triangles $\triangle ABC$, $\triangle PQR$.

Solució:

Siga $h = \overline{AH}$, altura del triangle $\triangle ABC$. $\overline{AP} = 2h$. Siguen D i E les projeccions de P sobre les rectes AB, AE respectivament.

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle QAR$ són iguals.

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle ADP$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PD}}{b} = \frac{2h}{a}, \text{ aleshores, } \overline{PD} = \frac{2bh}{a}.$$

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle AEP$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

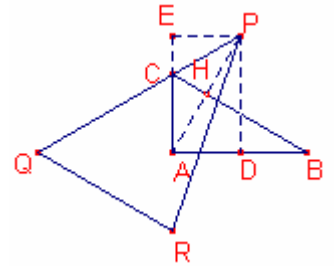
$$\frac{\overline{PE}}{c} = \frac{2h}{a}, \text{ aleshores, } \overline{PE} = \frac{2ch}{a}.$$

L'àrea del triangle $\triangle PQR$ és la suma de les àrees dels triangles $\triangle QAR$, $\triangle ARP$, $\triangle QAP$.

$$S_{ABC} = \frac{ah}{2}.$$

$$S_{PQR} = S_{QAR} + S_{ARP} + S_{QAP} = \frac{ah}{2} + \frac{c \cdot \overline{PE}}{2} + \frac{b \cdot \overline{PD}}{2} = \frac{ah}{2} + \frac{c^2 h}{a} + \frac{b^2 h}{a} = \frac{ah}{2} + ah = \frac{3}{2} ah.$$

$$\text{El quocient de les àrees és: } \frac{S_{ABC}}{S_{PQR}} = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{3}{2} ah} = \frac{1}{3}.$$



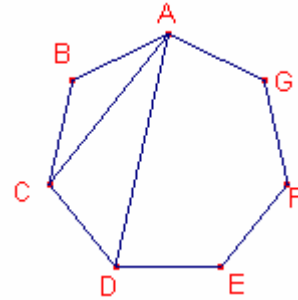
6.- Siga ABCDEFG un heptàgon regular. Proveu que $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.

Solució 1:

Siga $a = \overline{AB}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AD}$.

Siga $\alpha = \angle BDA$. $7\alpha = 180^\circ$.

Aleshores, $\angle BAD = 2\alpha$, $\angle ABD = 4\alpha$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle ABD$:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin 2\alpha}, \text{ aleshores, } b = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} a$$

$$\frac{b}{\sin 2\alpha} = \frac{c}{\sin 4\alpha}, \text{ aleshores, } c = b \frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha} a.$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sin \alpha}{a \cdot \sin 2\alpha} + \frac{\sin \alpha}{a \sin 4\alpha} = \frac{1}{a} \left(\frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\sin \alpha}{\sin 4\alpha} \right) = \frac{1}{a} \frac{\sin \alpha (\sin 4\alpha + \sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha \cdot \sin 4\alpha} =$$

Notem que $4\alpha = 180^\circ - 4\alpha$, aleshores, $\sin 3\alpha = \sin 4\alpha$:

$$= \frac{1}{a} \frac{\sin \alpha \cdot 2 \cdot \sin 3\alpha \cdot \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin 3\alpha} = \frac{1}{a}$$

Solució 2:

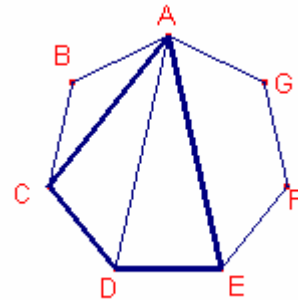
Siga $a = \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{DE}$, $b = \overline{AC} = \overline{CE}$, $c = \overline{AD} = \overline{AE}$.

Aplicant el teorema de Tolomeu:

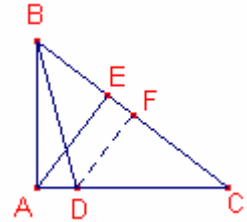
$$ac + ab = bc.$$

Dividint la igualtat per abc:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a}.$$



7.- Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$. Siguen D i E punts dels costats \overline{AC} i \overline{BD} respectivament, tals que \overline{AE} i \overline{BC} són perpendiculars i $\overline{BD} = \overline{DC} = \overline{EC} = 1$. Determineu la longitud del costat \overline{AC} .



Solució:

Siga $x = \overline{AC}$, $z = \overline{AB}$.

Notem que el triangle $\triangle BDC$ és isòsceles $\overline{BD} = \overline{DC} = 1$.

Siga \overline{DF} l'altura del triangle $\triangle BDC$, siga $y = \overline{CF}$.

Els triangles $\triangle DCF, \triangle ACE$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{1}{y} = \frac{x}{1} \quad (1)$$

Els triangles $\triangle DCF, \triangle ABC$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{z} = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \quad (2)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ADB$:

$$(x-1)^2 + z^2 = 1^2 \quad (3)$$

Substituint les expressions (3) i (1) en l'expressió (2):

$$\frac{x}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}. \text{ Simplificant: } x^4 - 2x = 0. \text{ Resolent l'equació } x = \sqrt[3]{2}.$$

8.- Entre quins valors pot estar la distància entre l' incentre i el baricentre d'un triangle rectangle d'hipotenusa a.
Shariguin I159.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$.

El radi de la circumferència inscrita d'un triangle rectangle és, $r = p - a = \frac{-a + b + c}{2}$.

Siga N la projecció del baricentre G sobre el catet \overline{AB} .

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{AN} = \frac{c}{3}, \quad \overline{GN} = \frac{b}{3}.$$

Siga la recta paral·lela al catet \overline{AB} que passa per l' incentre I que talla el segment \overline{GN} en el punt P.

$$\overline{IP} = \overline{AN} - r = \frac{c}{3} - r = \frac{3a - 3b - c}{2}, \quad \overline{PG} = \overline{GN} - r = \frac{c}{3} - r = \frac{3a - b - 3c}{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle IPG$:

$$\overline{GI}^2 = \overline{IP}^2 + \overline{PG}^2 = \frac{(3a - 3b - c)^2}{36} + \frac{(3a - b - 3c)^2}{36} = \frac{7a^2 - 6a(b + c) + 3bc}{9}$$

Siga $\alpha = \angle ABC$, $\sin \alpha = \frac{b}{a}$, $\cos \alpha = \frac{c}{a}$.

Aleshores, $\overline{GI}^2 = \frac{a^2}{9}(7 - 6(\sin \alpha + \cos \alpha) + 3 \sin \alpha \cos \alpha)$, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Considerem la funció, $f(\alpha) = (7 - 6(\sin \alpha + \cos \alpha) + 3 \sin \alpha \cos \alpha)$.

$$f'(\alpha) = 0 \text{ si } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

La funció és estrictament decreixent en $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

La funció és estrictament creixent en $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

La funció té un mínim en $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

La mínima distància entre l' incentre i el baricentre s'assoleix en $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

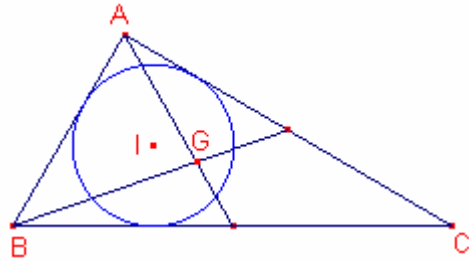
$$\overline{GI}_{\min} = \frac{a}{3} \sqrt{(7 - 6(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ) + 3 \sin 45^\circ \cos 45^\circ)} = \frac{a}{6} (3\sqrt{2} - 4).$$

La distància màxima entre l' incentre i el baricentre s'assoleix quan $\alpha = 0$ o $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

En tots dos casos triangles degenerats:

$$\overline{GI}_{\max} = \frac{a}{3}.$$

Aleshores, $\frac{a}{6} (3\sqrt{2} - 4) \leq \overline{GI} < \frac{a}{3}$.



9.- Proveu que els costats d'un triangle tal que el cercle inscrit talla una de les mitjanes en tres parts iguals són proporcionals a 5, 10 i 13.

Solució:

Siga $p = \frac{a+b+c}{2}$ el semiperímetre.

$\overline{BD} = \overline{BF} = p - b$, $\overline{AF} = \overline{AC} = p - a$.

Siga $x = \overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QR}$.

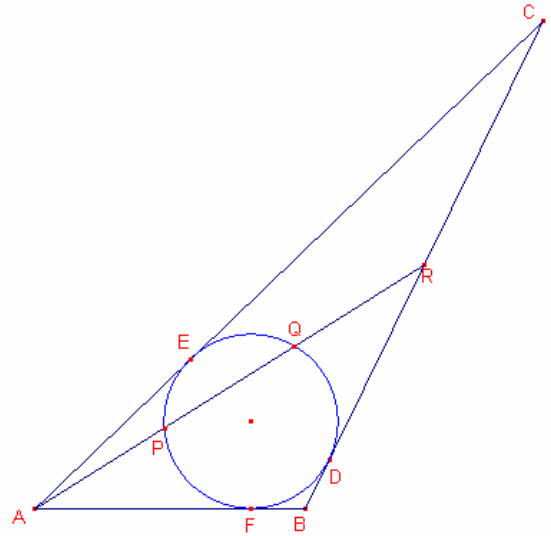
Calculant la potència de A respecte de la circumferència:

$$\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AF}^2.$$

$$2x^2 = (p - a)^2.$$

$$\frac{-a+b+c}{2} = \sqrt{2}x \quad (1)$$

$$\overline{BR} = \frac{a}{2}. \quad \overline{DR} = \frac{a}{2} - (p - b)$$



Calculant la potència de R respecte de la circumferència:

$$\overline{RQ} \cdot \overline{RP} = \overline{RD}^2.$$

$$2x^2 = (p - a)^2.$$

$$\frac{b-c}{2} = \sqrt{2}x \quad (2)$$

Igualant les expressions (1) i (2):

$$a = 2c.$$

Notem que el triangle $\triangle ABR$ és isòsceles $\overline{AB} = \overline{BR}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABR$.

$$(3x)^2 = c^2 + c^2 - 2cc \cdot \cos B, \text{ aleshores, } \cos B = \frac{-9x^2 + 2c^2}{2c^2}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$:

$$b^2 = c^2 + (2c)^2 - 2c2c \cdot \cos B.$$

$$b^2 = c^2 + 18x^2.$$

$$(b+c)(b-c) = 18x^2.$$

Substituint (2)

$$(b+c)(b-c) = 9 \frac{(b-c)^2}{4}.$$

$$b+c = \frac{9}{4}(b-c). \quad 13c = 5b.$$

Aleshores: $\begin{cases} a = 2c \\ b = \frac{13}{5}c \end{cases}$ c, a, b són proporcionals a 5, 10, 13, respectivament.

10.- Siguen a, b, c els costats d'un triangle de semiperímetre p i R el radi de la circumferència circumscrita. Demostreu que $\frac{a^3}{\sin A} + \frac{b^3}{\sin B} + \frac{c^3}{\sin C} \geq \frac{8Rp^2}{3}$.

Solució:

Aplicant el teorema dels sinus al triangle: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

$$\frac{a^3}{\sin A} + \frac{b^3}{\sin B} + \frac{c^3}{\sin C} = a^2 \frac{a}{\sin A} + b^2 \frac{b}{\sin B} + c^2 \frac{c}{\sin C} = (a^2 + b^2 + c^2)2R.$$

$$\frac{a^3}{\sin A} + \frac{b^3}{\sin B} + \frac{c^3}{\sin C} \geq \frac{8Rp^2}{3} \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)2R \geq \frac{8Rp^2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4p^2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

$$(a - b)^2 \geq 0 \quad a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

$$(a - c)^2 \geq 0 \quad a^2 + c^2 \geq 2ac.$$

$$(b - c)^2 \geq 0 \quad b^2 + c^2 \geq 2bc.$$

Sumant les 3 inequacions:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

La igualtat s'assoleix quan $a = b = c$, és a dir el triangle és equilàter.