

1.- Ens donen una circumferència c de centre O i un punt fix F . Es tracta de trobar un punt P sobre la recta FO de manera que, si T és el punt de tangència d'una de les rectes tangents traçades des de P a c , aleshores $\overline{PF} = \overline{PT}$.

Solució:

Siga F fix tal que $\overline{OF} = a$.

Considerem la circumferència c de centre O i radi r .

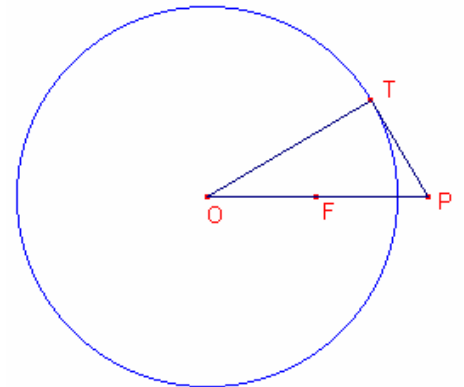
Siga P el punt solució del problema tal que $b = \overline{OP}$, $b > r$.

Determinem b .

Calculant la potència de P respecte de la circumferència c :

$$\overline{PT} = \sqrt{b^2 - r^2}.$$

$$\overline{PF} = |b - a|.$$



Igualant ambdues expressions:

$$\sqrt{b^2 - r^2} = |b - a|.$$

Resolent l'equació en la incògnita b :

$b = \frac{a^2 + r^2}{2a}$. Notem que $b \geq r$, aleshores P és exterior a la circumferència c .

El problema té solució única si $a \neq 0$ és a dir, si F no és el centre de la circumferència c .

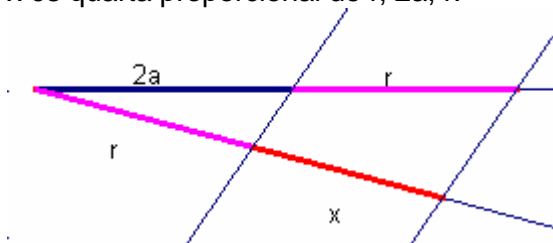
Construcció:

$$b = \frac{a}{2} + \frac{r^2}{2a}$$

Calculem $\frac{r^2}{2a} = x$

$$\frac{r}{2a} = \frac{x}{r}$$

x és quarta proporcional de r , $2a$, r :



Aleshores:

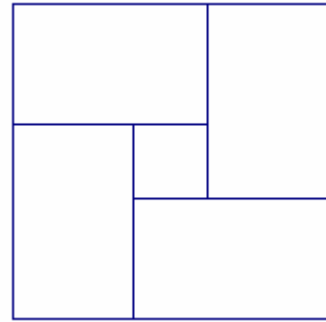
$$b = \frac{a}{2} + x$$



2.- Siguen 4 rectangles iguals i un quadrat formen un altre quadrat (veure figura).

L'àrea del quadrat gran és S i l'àrea del quadrat menut és Q. La proporció entre les àrees dels dos quadrats és

$\frac{S}{Q} = 9 + 4\sqrt{5}$. Calculeu la proporció dels costats dels rectangles.



Solució:

Siga ABCD el quadrat gran de costat $x = \overline{AB}$.

Siga EFGH el quadrat menut de costat $y = \overline{EF}$.

Per hipòtesi la proporció de les àrees és $\frac{S}{Q} = 9 + 4\sqrt{4}$:

$$9 + 4\sqrt{5} = \left(\frac{x}{y}\right)^2.$$

Aleshores, $\frac{x}{y} = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5}$.

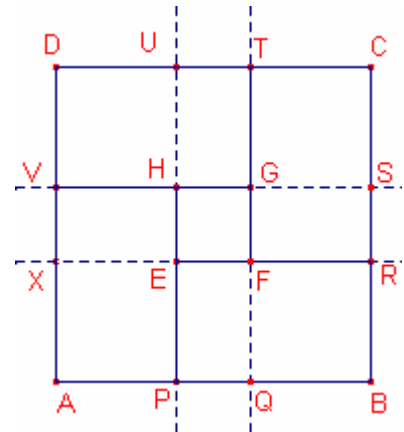
Considerem el rectangle APHV.

$$\overline{AP} = \frac{x-y}{2}$$

$$\overline{AV} = \frac{x-y}{2} + y = \frac{x+y}{2}.$$

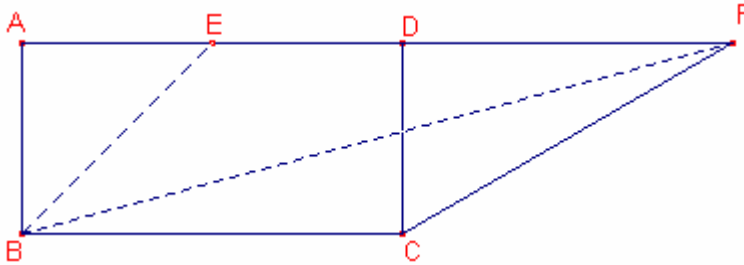
Calculem la proporció entre els costats del rectangle APHV:

$$\frac{\overline{AV}}{\overline{AP}} = \frac{x+y}{x-y} = \frac{\frac{x}{y} + 1}{\frac{x}{y} - 1} = \frac{2 + \sqrt{5} + 1}{2 + \sqrt{5} - 1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$



3.- Siga un rectangle ABCD tal que $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. A l'exterior del rectangle dibuixem el triangle $\triangle DCF$. Tal que l'angle $\angle DFC = 30^\circ$ i els punts A, D, F estan alineats. Siga D el punt mig del costat \overline{AD} . Calculeu la mesura de l'angle $\angle EBF$.

Solució:



Siga $a = \overline{AB}$. $\overline{BC} = 2a$.

El triangle $\triangle DCF$ és rectangle.

$\frac{\overline{CD}}{\overline{CF}} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Aleshores, $\overline{CF} = 2a$.

El triangle $\triangle BCF$ és isòsceles.

$\angle BCF = \angle BCD + \angle DCF = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.

Aleshores, $\angle FBC = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$.

El triangle $\triangle BAE$ és rectangle i isòsceles $\overline{AB} = \overline{AE}$.

Aleshores, $\angle ABE = 45^\circ$. $\angle EBC = 45^\circ$.

$\angle EBF = \angle EBC - \angle FBC = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$.

4.- Donada una semicircumferència de diàmetre $\overline{AB} = 2R$, es considera una corda \overline{CD} de longitud constant. Siga E la intersecció de AC amb BD i F la intersecció de AD amb BC.

Proveu que el segment \overline{EF} té longitud constant i direcció constant al variar la corda \overline{CD} sobre la semicircumferència.

Olimpíada espanyola 2007.

Solució:

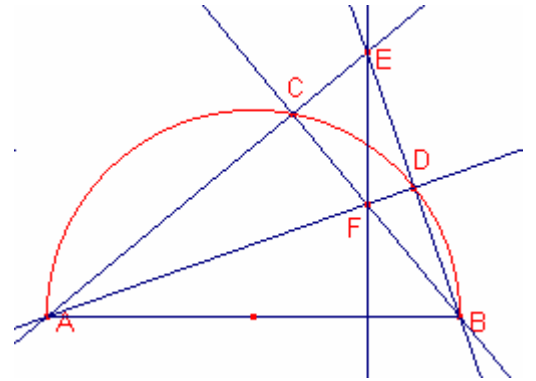
$\angle ADB = 90^\circ$ ja que és un angle inscrit en la circumferència i abraça un diàmetre.

$\angle ACB = 90^\circ$ ja que és un angle inscrit en la circumferència i abraça un diàmetre..

Considerem el triangle $\triangle ABE$.

\overline{AD} és perpendicular a \overline{BE} , aleshores és una altura,
 \overline{AC} és perpendicular al \overline{AE} , aleshores és una altura.

F és l'ortocentre del triangle $\triangle ABE$.



Aleshores la recta EF és altura del triangle (les altures del triangle s'intersecten en l'ortocentre).

Aleshores el segment \overline{EF} és perpendicular al costat \overline{AB} .

El quadrilàter CFDE és inscriptible en una circumferència ja que els angles oposats són suplementaris, $\angle FDE = 90^\circ$, $\angle FCE = 90^\circ$.

\overline{EF} és el diàmetre de la circumferència circumscrita al quadrilàter CFDE.

Per ser \overline{CD} constant l'arc de la semicircumferència és constant.

Aleshores $\angle CED$ és constant i sabem la seua mesura la semidiferència dels arcs que abraça que són constants, $\angle CED = \frac{180^\circ - \text{CD}}{2} = \beta$.

Considerem el triangle $\triangle CDE$:

Aplicant el teorema del sinus:

$\frac{\overline{CD}}{\sin \beta} = 2R$ on R és el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\triangle CDE$ que és la mateixa que la circumscrita al quadrilàter CFDE.

Per tant $2R$ és constant ja que $\frac{\overline{CD}}{\sin \beta}$ és constant.

$\overline{EF} = 2R$, és constant i val $\overline{EF} = 2R = \frac{\overline{CD}}{\sin \beta}$.

5.- Siga O el circumcentre del triangle $\triangle ABC$. La bisectriu de l'angle A talla el costat oposat en el punt P. Demostreu que:

$$\overline{AP}^2 + \overline{OA}^2 - \overline{OP}^2 = bc.$$

Solució:

Siga R el radi de la circumferència circumscriba al triangle $\triangle ABC$.

Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\frac{b}{CP} = \frac{c}{a - CP}, \text{ aleshores, } \overline{CP} = \frac{ab}{b+c} \quad (1)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$:

$$\cos C = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} \quad (2)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle APC$:

$$\overline{AP}^2 = b^2 + \overline{CP}^2 - 2b\overline{CP}\cos C.$$

Considerem el triangle isòsceles $\triangle BCO$, $R = \overline{OB} = \overline{OC}$.

Siga $\alpha = \angle BCO$.

$$\cos \alpha = \frac{a}{2R}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle OPC$:

$$\overline{OP}^2 = R^2 + \overline{CP}^2 - 2R\overline{CP}\cos \alpha.$$

$$\overline{OP}^2 = R^2 + \overline{CP}^2 - 2R\overline{CP}\frac{a}{2R}.$$

$$\overline{OP}^2 = R^2 + \overline{CP}^2 - a\overline{CP}.$$

$$\begin{aligned} \overline{AP}^2 + \overline{OA}^2 - \overline{OP}^2 &= \left(b^2 + \overline{CP}^2 - 2b\overline{CP}\cos C \right) + R^2 - \left(R^2 + \overline{CP}^2 - a\overline{CP} \right) = \\ &= b^2 + \overline{CP}(-2b \cdot \cos C + a) = \end{aligned}$$

Substituint les expressions (1) (2):

$$= b^2 + \frac{ab}{b+c} \left(2b \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab} + a \right) =$$

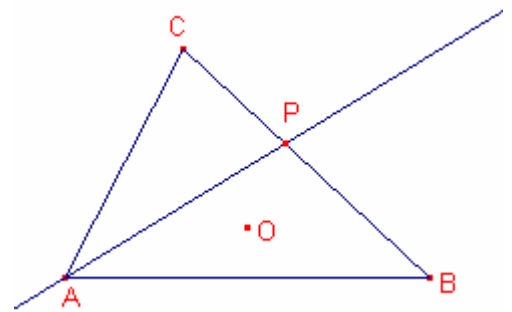
$$= b^2 + \frac{ab}{b+c} \left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{a} + a \right) =$$

$$= b^2 + \frac{ab}{b+c} \left(\frac{c^2 - b^2}{a} \right) =$$

$$= b^2 + \frac{ab}{b+c} \left(\frac{(b+c)(c-b)}{a} \right) =$$

$$= b^2 + b(c-b) = bc.$$

Aleshores, $\overline{AP}^2 + \overline{OA}^2 - \overline{OP}^2 = bc.$



6.- Siga ABCDEFGH un octògon regular de radi 1. Demostreu que $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AC}$

Solució.

L'octògon regular està inscrit en una circumferència de radi $\overline{OA} = 1$.

Considerem el triangle $\triangle ACD$ està inscrit en la circumferència circumscriu a l'octògon.

$$\angle DAC = \frac{45^\circ}{2}, \quad \angle ADC = 45^\circ, \quad \angle ACD = 180^\circ - \frac{135^\circ}{2}.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ACD$:

$$\frac{\overline{CD}}{\sin \frac{45^\circ}{2}} = \frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ} = \frac{\overline{AD}}{\sin \left(180^\circ - \frac{135^\circ}{2}\right)} = 2 \cdot 1$$

Aleshores:

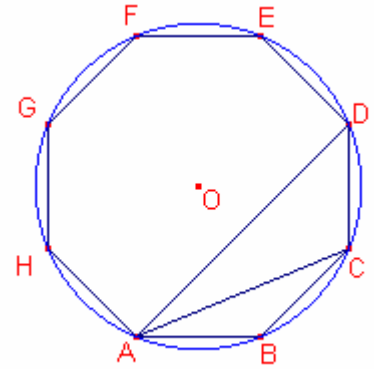
$$\overline{AB} = \overline{CD} = 2 \cdot \sin \frac{45^\circ}{2}.$$

$$\overline{AD} = 2 \cdot \sin \frac{135^\circ}{2}.$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = 4 \cdot \sin \frac{45^\circ}{2} \cdot \sin \frac{135^\circ}{2} = 4 \left(\frac{-1}{2} \right) (\cos 90^\circ - \cos 45^\circ) = 2 \cdot \cos 45^\circ.$$

$$\overline{AC} = 2 \cdot \sin 45^\circ = 2 \cdot \cos 45^\circ.$$

Aleshores, $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AC}$.



7.- Com s'aprecia en el diagrama, en un prisma quadrangular:

$$ABCD - A_1B_1C_1D_1, \overline{AB} = \overline{AD} = 2, \overline{DC} = 2\sqrt{3}$$

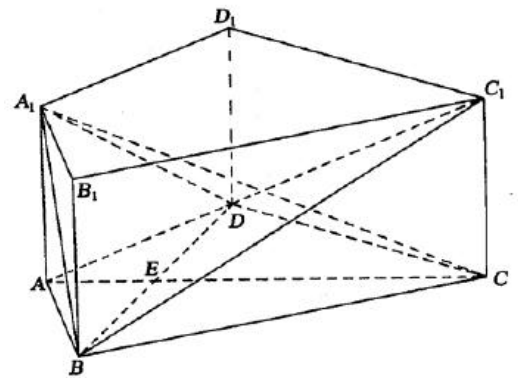
$\overline{AA_1} = \sqrt{3}$. $\overline{AD} \perp \overline{DC}$, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ i el peu de la perpendicular és E.

i) Proveu que $\overline{BD} \perp \overline{A_1C}$.

ii) Determineu l'angle entre els plans A_1BD , BC_1D .

iii) Determineu l'angle format per les rectes AD i BC_1 que estan en plans diferents.

Problema selectivitat xinesa.



Solució:

Calculem els costats i els angles del quadrilàter ABCD.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle ADC$, $\angle D = 90^\circ$:

$$\sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4. \text{ Els angles són } \angle ACD = 30^\circ, \angle DAC = 60^\circ.$$

Els triangles $\triangle ADC$, $\triangle AED$ són semblants i la raó de proporcionalitat és 2:1. Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{AE} = 1, \overline{DE} = \sqrt{3}.$$

$$\angle DAE = 60^\circ, \angle ADE = 30^\circ.$$

$$\overline{CE} = \overline{AC} - \overline{AE} = 4 - 1 = 3.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle CED$:

$$\angle EDC = 60^\circ, \angle DCE = 30^\circ.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AEB$, $\angle E = 90^\circ$:

$$\overline{BE} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

$$\angle ABE = 30^\circ, \angle BAE = 60^\circ.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle BEC$, $\angle E = 90^\circ$:

$$\overline{BC} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}.$$

$$\angle BCE = 30^\circ, \angle CBE = 30^\circ.$$

Resumint el quadrilàter ABCE és tal que:

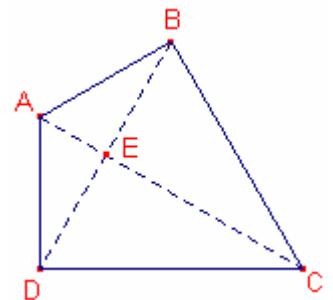
$$\overline{AB} = \overline{AD} = 2, \overline{CD} = \overline{BC} = 2\sqrt{3}, \angle ADC = \angle ABC = 90^\circ, \angle BAD = 120^\circ, \angle BCD = 60^\circ.$$

Notem que $\triangle BCD$ és un triangle equilàter.

Considerem el prisma quadrangular amb les següents coordenades cartesianes:

$$D(0,0,0), C(2\sqrt{3},0,0), A(0,2,0), B(\sqrt{3},3,0).$$

$$D_1(0,0,\sqrt{3}), C_1(2\sqrt{3},0,\sqrt{3}), A_1(0,2,\sqrt{3}), B_1(\sqrt{3},3,\sqrt{3}).$$



i)

$$\overrightarrow{BD} = (-\sqrt{3}, -3, 0), \quad \overrightarrow{A_1C} = (2\sqrt{3}, -2, -\sqrt{3}).$$

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 0, \text{ aleshores, } \overline{BD} \perp \overline{A_1C}.$$

ii)

Siga α l'angle que formen els dos plànols.

$$\text{Els vectors directores del plànol } A_1BD, \text{ són } \overrightarrow{DB} = (\sqrt{3}, 3, 0), \quad \overrightarrow{DA_1} = (0, 2, \sqrt{3})$$

El vector característic del plànol és:

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DA_1} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sqrt{3} & 3 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = (3\sqrt{3}, -3, 2\sqrt{3})$$

$$\text{Els vectors directores del plànol } BC_1D, \text{ són } \overrightarrow{DB} = (\sqrt{3}, 3, 0), \quad \overrightarrow{DC_1} = (2\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$$

El vector característic del plànol és:

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DC_1} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sqrt{3} & 3 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = (3\sqrt{3}, -3, -6\sqrt{3}).$$

L'angle entre els plànols A_1BD , BC_1D és l'angle dels vectors característics dels dos plànols:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0. \text{ Aleshores } \alpha = 90^\circ.$$

iii)

$$\overrightarrow{AD} = (0, -2, 0), \quad \overrightarrow{BC_1} = (\sqrt{3}, -3, \sqrt{3}).$$

L'angle format per les rectes AD i BC_1 és l'angle que formen els vectors $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC_1}$.

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC_1} = \|\overrightarrow{AD}\| \cdot \|\overrightarrow{BC_1}\| \cdot \cos \beta.$$

$$6 = 2 \cdot \sqrt{15} \cdot \cos \beta.$$

$$\beta = \arccos \frac{\sqrt{15}}{5} = 39^\circ 13' 53''.$$

8.- Per un punt qualsevol I interior del triangle $\triangle ABC$ tracem el segment \overline{PQ} paral·lel a \overline{AB} , el segment \overline{RS} paral·lel a \overline{BC} i \overline{TU} paral·lel a \overline{AC} (P, S en \overline{AC} , T, Q en \overline{BC} ; U, R en \overline{AB}). Proveu que:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{RS}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{TU}}{\overline{AC}} = 2.$$

Solució:

Siga r la distància de I al costat \overline{AB} , s la distància de I al costat \overline{BC} , y la distància de I al costat \overline{AC} . Siguen h_a, h_b, h_c

les altures del triangle $\triangle ABC$ respecte dels costats a, b, c, respectivament.

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle PRC$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{h_c - r}{h_c}.$$

$$\text{Anàlogament, } \frac{\overline{RS}}{\overline{BC}} = \frac{h_a - s}{h_a}, \quad \frac{\overline{TU}}{\overline{AC}} = \frac{h_b - t}{h_b}.$$

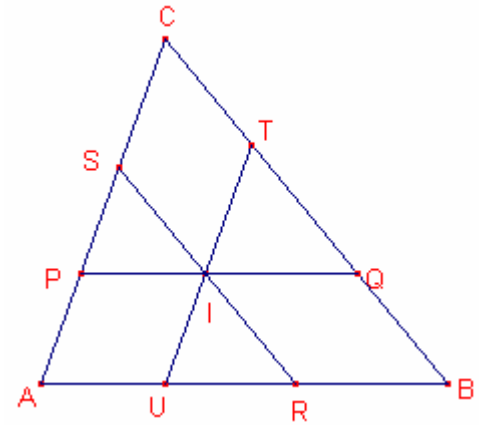
Dos triangles que tenen la mateixa base les àrees són proporcionals a les altures:

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle ABI$ tenen la mateixa base \overline{AB} , aleshores:

$$\frac{r}{h_c} = \frac{S_{ABI}}{S_{ABC}}.$$

$$\text{Anàlogament, } \frac{s}{h_a} = \frac{S_{BCI}}{S_{ABC}}, \quad \frac{t}{h_b} = \frac{S_{ACI}}{S_{ABC}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{RS}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{TU}}{\overline{AC}} &= \frac{h_c - r}{h_c} + \frac{h_a - s}{h_a} + \frac{h_b - t}{h_b} = \\ &= 3 - \left(\frac{r}{h_c} + \frac{s}{h_a} + \frac{t}{h_b} \right) = \\ &= 3 - \left(\frac{S_{ABI}}{S_{ABC}} + \frac{S_{BCI}}{S_{ABC}} + \frac{S_{ACI}}{S_{ABC}} \right) = \\ &= 3 - \frac{S_{ABI} + S_{BCI} + S_{ACI}}{S_{ABC}} = \\ &= 3 - \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 2. \end{aligned}$$



9.- Una recta paral·lela a la recta tangent en A a la circumferència circumscrita al triangle $\triangle ABC$ intersecta els costats \overline{AB} i \overline{AC} en els punts D i E respectivament. Sabent que $\overline{AD} = 6$, $\overline{AE} = 5$ i $\overline{EC} = 7$. Determineu la mesura de \overline{BD} .

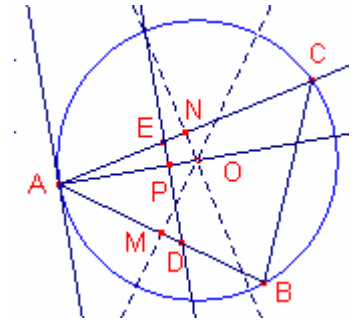
Solució 1:

Siga O en el centre de la circumferència circumscrita al triangle $\triangle ABC$. La recta DE talla la recta AO en el punt P.

Siga $x = \overline{BD}$, $y = \overline{AP}$, $R = \overline{AO}$.

Siga M el punt mig del costat \overline{AB} , N el punt mig del costat \overline{AC}

$$\overline{AM} = \frac{6+x}{2}, \quad \overline{AN} = \frac{5+7}{2} = 6.$$



Els triangles rectangles $\triangle AON$, $\triangle APE$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

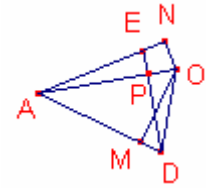
$$\frac{\overline{AO}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AP}}.$$

$$\frac{R}{6} = \frac{5}{y} \quad (1)$$

Els triangles rectangles $\triangle AOM$, $\triangle APD$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AP}}.$$

$$\frac{R}{\frac{6+x}{2}} = \frac{6}{y} \quad (2)$$



Dividint les expressions (1) i (2):

$$\frac{6+x}{12} = \frac{5}{6}. \quad \text{Resolent l'equació:} \quad x = \overline{BD} = 4.$$

Solució 2:

Els angles $\angle ABC$, $\angle FAC$ són iguals per ser inscrits i abraçar el mateix arc.

Con \overline{DE} i \overline{AF} són paral·lels $\angle AED = \angle FAC$.

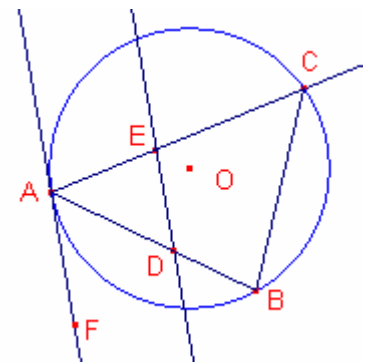
Aleshores, $\angle AED = \angle ABC$.

Per tant els triangles $\triangle ABC$, $\triangle AED$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}.$$

$$\frac{\overline{AB}}{5} = \frac{12}{6} = 2. \quad \text{Aleshores, } \overline{AB} = 10.$$

$$\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = 10 - 6 = 4.$$



10.- El quadrat ABCD té costats de longituds, un cercle de centre E té radi r. El cercle passa pel punt D i D està sobre el segment \overline{BE} . El punt F està sobre el cercle, en el mateix costat de BE com A. El segment \overline{AF} és tangent al cercle i $\overline{AF} = 2r$. Calculeu la proporció $\frac{r}{s}$.

Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABD$:

$$\overline{BD} = s\sqrt{2}.$$

$$\overline{BE} = r + \sqrt{2}s.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABE$:

$$\overline{AE}^2 = s^2 + (r + \sqrt{2}s)^2 - 2s(r + \sqrt{2}s)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{AE}^2 = s^2 + r^2 + \sqrt{2}rs.$$

Per ser F tangent al cercle, el triangle $\triangle AFE$ és rectangle, $F = 90^\circ$.

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FE}^2.$$

$$s^2 + r^2 + \sqrt{2}rs = (2r)^2 + r^2.$$

$$4r^2 - \sqrt{2}rs - s^2 = 0.$$

Dividint l'equació per s^2 :

$$4\left(\frac{r}{s}\right)^2 - \sqrt{2}\left(\frac{r}{s}\right) - 1 = 0.$$

Resolent l'equació en la incògnita $\frac{r}{s}$:

$$\frac{r}{s} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{18}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

