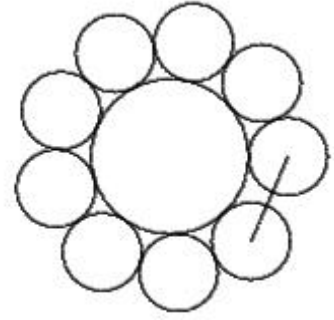


1.- Dibuixem 9 cercles contigus tangents de radi $\frac{1}{2}$ i tangents a un cercle de radi 1.
 Calculeu la distància entre els centres del primer i darrer dels cercles.

Problema Crux Mathematicorum M294



Solució:

Siguem els centres del primer i segon cercle de radi $\frac{1}{2}$.

Per ser tangents els cercles de radi $\frac{1}{2}$, $\overline{AB} = 1$

Siga O el centre del cercle de radi 1, $\overline{OA} = \overline{OB} = \frac{3}{2}$.

Siga C el punt de tangència dels dos primers cercles de radi $\frac{1}{2}$.

Siga $\alpha = \angle AOC$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle

$\triangle OCA$, $C = 90^\circ$:

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{3}.$$

Siga D el centre de l'últim cercle de radi $\frac{1}{2}$.

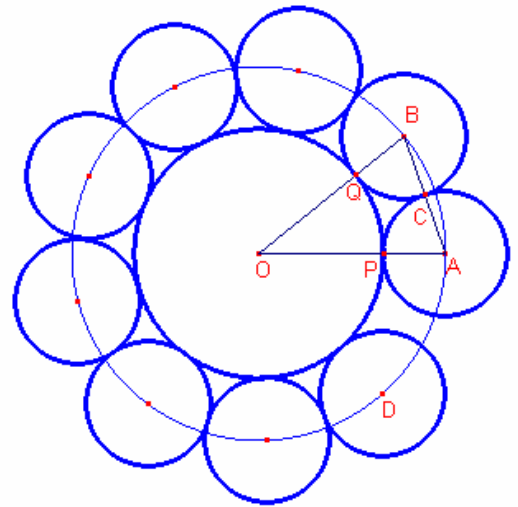
$$\angle AOD = 360^\circ - 16\alpha = 360^\circ - 16 \cdot \arcsin \frac{1}{3} = 48^\circ 27' 37''.$$

Siga $d = \overline{AD}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle OAD$:

$$d^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cos 48^\circ 27' 37''$$

$$d = 1.231208319$$



2.- Un quadrat ABCD està inscrit en un sector circular l'arc la vuitena part d'un cercle de radi 1. Dos dels vèrtexs del quadrat estan en el radi i els dos altres estan en la circumferència. Determineu l'àrea del quadrat. S'exigeix una resposta exacta de la forma $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$ on a, b, c i d són enters.

Problema Crux Mathematicorum M295

Solució:

Siga $c = \overline{AB}$ el costat del quadrat.

L'àrea del quadrat és c^2 .

Siga $x = \overline{OP}$. $\overline{OB} = 1$.

$$\angle AOP = \frac{45^\circ}{2}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle OPA$:

$$\frac{c}{2x} = \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{2} - 1.$$

$$\text{Aleshores: } x = \frac{1}{2(\sqrt{2}-1)} c = \frac{1+\sqrt{2}}{2} c.$$

$$\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{AB} = \frac{3+\sqrt{2}}{2} c.$$

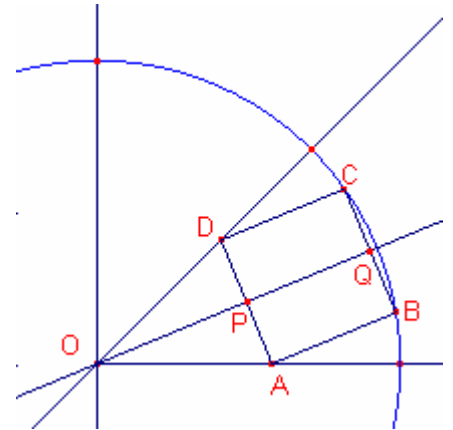
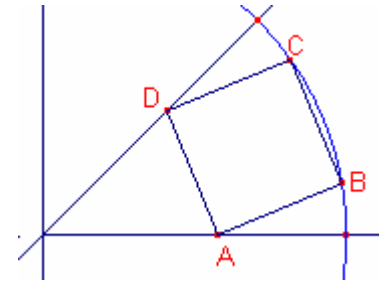
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle OBQ$:

$$\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2} c\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 1^2.$$

$$\frac{6+3\sqrt{2}}{2} c^2 = 1.$$

L'àrea del quadrat és:

$$c^2 = \frac{2}{6+3\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}.$$



3.- Siga el triangle $\triangle ABC$. Siga D un punt del costat \overline{AC} tal que $\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = s$, i E un punt del costat \overline{AB} tal que $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = r$. Determineu la raó entre les àrees dels triangles $\triangle ABC$ i $\triangle PBC$.

Problema Crux Mathematicorum M300

Solució:

Siga M l'àrea del triangle $\triangle EBP$, N l'àrea del triangle $\triangle CDP$.

Siga X l'àrea del triangle $\triangle PBC$, S l'àrea del triangle $\triangle ABC$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases, aleshores:

$$S_{AEP} = rM, S_{ADP} = sN.$$

$$\frac{X}{M} = \frac{(1+s)N}{rM}, \text{ aleshores, } X = \frac{1+s}{r}N.$$

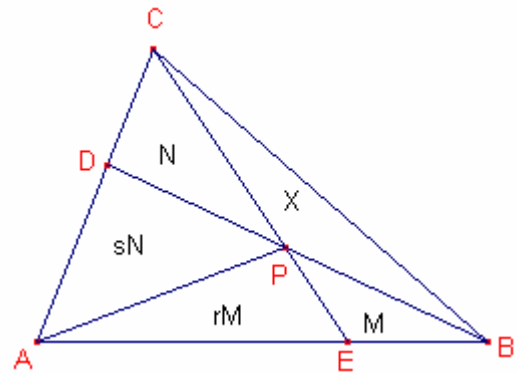
$$\frac{(1+r)M + sN}{X + N} = s, \text{ aleshores, } (1+r)M = sX.$$

$$\frac{(1+s)N + rM}{X + M} = r, \text{ aleshores, } (1+s)N = rX.$$

$$\text{Dividint les dues expressions: } M = \frac{s(1+s)}{r(1+r)}N.$$

$$\frac{S}{X} = \frac{(1+r)M + (1+s)N + X}{X} = \frac{\left(\frac{s(1+s)}{r} + 1 + s + \frac{1+s}{r}\right)N}{\frac{1+s}{r}N} = \frac{s + s^2 + r + rs + 1 + s}{1+s} =$$

$$= \frac{(1+s)^2 + (1+s)r}{1+s} = 1 + s + r.$$



4.- Siga el triangle $\triangle ABC$ tal que $\angle ABC = \angle ACB = 40^\circ$. Si P és un punt interior del triangle tal que $\angle PBC = 20^\circ$ i $\angle PCB = 30^\circ$. Demostreu que $\overline{BP} = \overline{BA}$.
 Problema Crux Mathematicorum M302

Solució:

El triangle $\triangle ABC$ és isòsceles i $\angle BAC = 100^\circ$.
 Siga $b = \overline{AC} = \overline{AB}$, $a = \overline{BC}$.
 $\angle BPC = 130^\circ$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{a}{\sin 100^\circ} = \frac{b}{\sin 40^\circ} \cdot \frac{a}{\sin 80^\circ} = \frac{b}{\sin 40^\circ}.$$

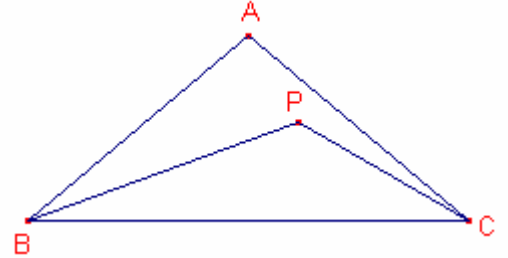
$$\frac{a}{2 \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ} = \frac{b}{\sin 40^\circ}. \text{ Simplificant: } a = 2b \cdot \cos 40^\circ.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle BCP$:

$$\frac{\overline{BP}}{\sin 30^\circ} = \frac{a}{\sin 130^\circ} \cdot \frac{\overline{BP}}{\sin 30^\circ} = \frac{a}{\cos 40^\circ}$$

$$\frac{\overline{BP}}{\sin 30^\circ} = \frac{2b \cdot \cos 40^\circ}{\cos 40^\circ}. \text{ Simplificant: } \frac{\overline{BP}}{b} = 2 \cdot \sin 30^\circ = 1.$$

Aleshores, $\overline{BP} = b = \overline{BA}$.



5.- En un triangle $\triangle ABC$ la bisectriu de l'angle C talla la circumferència circumscrita en R i la mediatriu de \overline{BC} en P i la mediatriu de \overline{AC} en Q . El punt mig de \overline{BC} és K i el punt mig de \overline{AC} és L . Demostreu que els triangles $\triangle RPK$ i $\triangle RQL$ tenen la mateixa àrea. IMO 2007

Solució:

Siga r el radi de la circumferència circumscrita al triangle

$\triangle ABC$ i O el circumcentre.

$$\angle KPC = 90^\circ - \frac{C}{2}, \quad \angle RPK = 90^\circ + \frac{C}{2}.$$

$$\angle LQC = 90^\circ - \frac{C}{2}, \quad \angle RQL = 90^\circ + \frac{C}{2}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle PKC$:

$$\overline{PK} = \overline{PC} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle QLC$:

$$\overline{QL} = \overline{QC} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

$$S_{\triangle RPK} = \frac{\overline{PR} \cdot \overline{PK} \cdot \sin \left(90^\circ + \frac{C}{2} \right)}{2} = \frac{\overline{PR} \cdot \overline{PC} \cdot \sin \left(\frac{C}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{C}{2} \right)}{2} = \frac{\overline{PR} \cdot \overline{PC} \cdot \sin C}{4}.$$

$$S_{\triangle RQL} = \frac{\overline{QR} \cdot \overline{QL} \cdot \sin \left(90^\circ + \frac{C}{2} \right)}{2} = \frac{\overline{QR} \cdot \overline{QC} \cdot \sin \left(\frac{C}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{C}{2} \right)}{2} = \frac{\overline{QR} \cdot \overline{QC} \cdot \sin C}{4}.$$

Aplicant la potència del punt P respecte de la circumferència circumscrita al triangle

$\triangle ABC$:

$$\overline{PR} \cdot \overline{PC} = r^2 - \overline{PO}^2.$$

Aplicant la potència del punt Q respecte de la circumferència circumscrita al triangle

$\triangle ABC$:

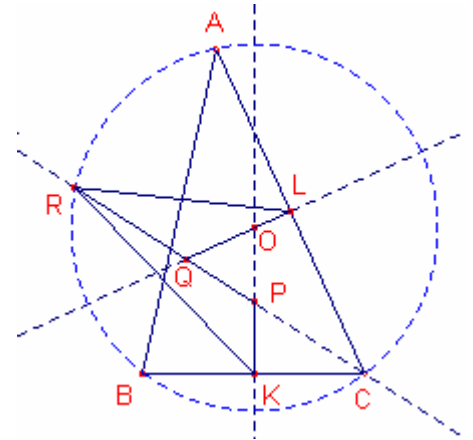
$$\overline{QR} \cdot \overline{QC} = r^2 - \overline{QO}^2.$$

$$S_{\triangle RPK} = \frac{\left(r^2 - \overline{PO}^2 \right) \sin C}{4}, \quad S_{\triangle RQL} = \frac{\left(r^2 - \overline{QO}^2 \right) \sin C}{4}.$$

$\angle QPO = \angle KPC = 90^\circ - \frac{C}{2}$, $\angle OQP = 90^\circ - \frac{C}{2}$. Aleshores, el triangle $\triangle OPQ$ és

isòsceles, $\overline{OP} = \overline{OQ}$.

Aleshores, $S_{\triangle RPK} = S_{\triangle RQL}$.



6.- Determineu l'àrea del rombe ABCD, si els radis de les circumferències circumsrites al voltant dels triangle $\triangle ABC$ i $\triangle ABD$ són R i r, respectivament. Shariguin I176.

Solució:

Siga $c = \overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{CD}$. Siga $\alpha = \angle BAD$.
 $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$.

La superfície del rombe és $S_{ABCD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{c}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\overline{AC}}{\sin\alpha} = 2R. \text{ Aleshores, } \overline{AC} = 2R \cdot \sin\alpha.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABD$:

$$\frac{c}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\sin\alpha} = 2r. \text{ Aleshores, } \overline{BD} = 2r \cdot \sin\alpha.$$

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2} = 2Rr \cdot \sin^2\alpha.$$

Dividint les dues relacions del teorema dels sinus:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{R}.$$

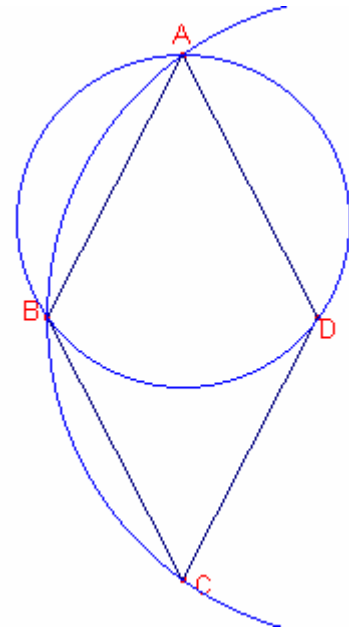
Aleshores aplicant relacions trigonomètriques de l'angle meitat:

$$\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{r^2}{R^2}.$$

$$\text{Resolent l'equació, } \cos\alpha = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2}.$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2}\right)^2 = \left(\frac{2Rr}{R^2 + r^2}\right)^2$$

$$S_{ABCD} = 2Rr \cdot \sin^2\alpha = \frac{(2Rr)^3}{(R^2 + r^2)^2}.$$



7.- En l'interior del quadrat ABCD s'agafa el punt M de manera que $\angle MAB = 60^\circ$, $\angle MCD = 15^\circ$. Determineu la mesura de l'angle $\angle MBC$.
Shariguin I 248.

Solució:

Siga el costat del triangle $\overline{AB} = 1$.

La recta CM talla el costat \overline{AD} en el punt E.

$\angle CEA = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$, $\angle EAM = 30^\circ$, $\angle EMA = 45^\circ$, $\angle ECB = 75^\circ$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle CDE$:

$$\overline{CE} = \frac{1}{\cos 15^\circ} = \sqrt{6} - \sqrt{2}. \quad \overline{DE} = \operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

$$\overline{AE} = 1 - \overline{DE} = \sqrt{3} - 1.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AME$:

$$\frac{\overline{EM}}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sin 45^\circ}. \quad \text{Aleshores, } \overline{EM} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

Notem que $\overline{EM} = \frac{1}{2} \overline{CE}$.

Aleshores, M està en la mediatriu del costat \overline{AB} .

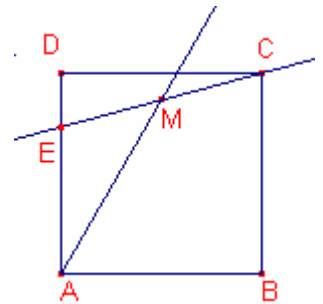
$\overline{AM} = \overline{BM}$, a més a més, $\angle MAB = 60^\circ$.

Aleshores, $\triangle ABM$ és un triangle equilàter.

$$\overline{BM} = \overline{AB} = \overline{CB}$$

Per tant, $\triangle BMC$ és isòsceles, aleshores:

$$\angle MBC = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ.$$



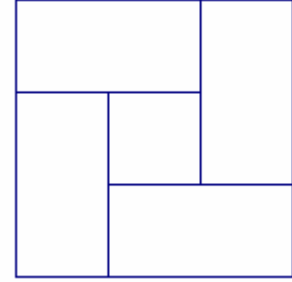
8.-

Quatre rectangles iguals estan disposats formant un quadrat de tal forma que estan sobre un altre quadrat més petit.

Siga S l'àrea del quadrat exterior i Q l'àrea del quadrat interior.

Si l'àrea del quadrat exterior és 9 vegades l'àrea del quadrat interior, determineu la raó dels costats dels rectangles.

CruX Mathematicorum M310.



Solució:

Si les àrees dels quadrats estan en proporció 9:1 la proporció

dels costats és $\sqrt{9} : 1$

Siguen els costats dels 4 rectangles a, b tal que $a \leq b$.

El costat del quadrat gran és $a + b$.

El costat del quadrat petit és $b - a$.

$$\frac{a+b}{b-a} = \frac{\sqrt{9}}{1} = 3.$$

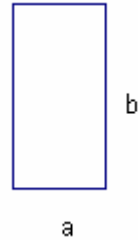
Aleshores,

$$a + b = 3b - 3a$$

$$4a = 2b$$

$$\frac{b}{a} = 2.$$

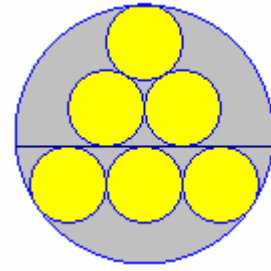
Aleshores la raó de proporcionalitat entre els costats dels rectangles és 1 : 2



9.-

Cinc circumferències d'igual radi r estan en l'interior d'una circumferència de radi R com indica la figura. Les circumferències de la línia de baix i la central és tangent a la corda. Determineu el valor del radi R de la circumferència exterior en funció de r .

Problema Sangaku.



Solució:

Considerem la corda \overline{AB} . Siga D el punt mig de \overline{AB} .

Siga O el centre de la circumferència exterior.

Siga C el punt de tangència de la circumferència exterior i la superior interior.

\overline{CD} és igual a l'altura del triangle equilàter $\triangle LMN$ més $2r$.

$$\overline{CD} = r\sqrt{3} + 2r = (2 + \sqrt{3})r.$$

$$\overline{DO} = \overline{CD} - R = (2 + \sqrt{3})r - R$$

Considerem el triangle rectangle $\triangle OPQ$.

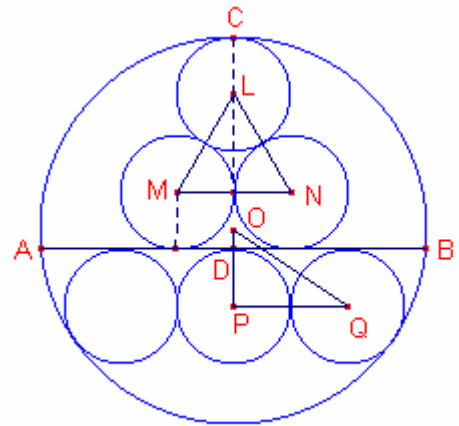
$$\overline{OQ} = R - r, \overline{PQ} = 2r, \overline{OP} = \overline{DO} + r = (3 + \sqrt{3})r - R.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$(R - r)^2 = (2r)^2 + ((3 + \sqrt{3})r - R)^2.$$

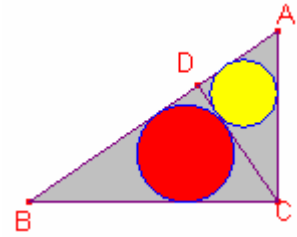
Resolent l'equació:

$$R = \frac{12 - 3\sqrt{3}}{2}r.$$



10.- En el triangle rectangle $\triangle ABC$, $C = 90^\circ$, siga \overline{CD} l'altura sobre la hipotenusa. Siguen r i s els radis de les circumferències inscrites als triangles

rectangles $\triangle ADC$, $\triangle BCD$, respectivament. Determineu la longitud dels catets del triangle $\triangle ABC$ en funció de r , s .
 Problema Sangaku.



Solució:

Siguen els catets $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle BCD$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{b}{c} = \frac{\overline{CD}}{a}, \text{ aleshores, } \overline{CD} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\text{Aleshores, } \overline{AD} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \overline{BD} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

El radi de la circumferència inscrita a un triangle rectangle és igual al semiperímetre menys la hipotenusa, aleshores:

$$r = \frac{\overline{AC} + \overline{AD} + \overline{CD}}{2} - \overline{AC}, \quad r = \frac{b + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{2} - b.$$

$$\text{Simplificant, } (2r + b)\sqrt{a^2 + b^2} = b(a + b) \tag{1}$$

$$s = \frac{\overline{BC} + \overline{BD} + \overline{CD}}{2} - \overline{BC}, \quad s = \frac{a + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{2} - a.$$

$$\text{Simplificant, } (2s + a)\sqrt{a^2 + b^2} = a(a + b) \tag{2}$$

Dividint les expressions (1) (2)

$$\frac{2r + b}{2s + a} = \frac{b}{a} \tag{3}$$

$$b = \frac{r}{s} a \tag{4}$$

Substituint l'expressió (4) en l'expressió (1):

$$\left(2r + \frac{r}{s}a\right)\sqrt{a^2 + \left(\frac{r}{s}\right)^2} = \frac{r}{s}a\left(a + \frac{r}{s}a\right).$$

Resolent l'equació en la incògnita a:

$$a = \frac{r^2 + s^2 + (r + s)\sqrt{r^2 + s^2}}{r} \tag{5}$$

Substituint l'expressió (5) en l'expressió (4):

$$a = \frac{r^2 + s^2 + (r + s)\sqrt{r^2 + s^2}}{s} \tag{6}$$