

1.- En una circumferència de radi  $R$  està inscrit el triangle  $\triangle ABC$ . En la recta  $AB$  s'agafa el punt  $M$  (més enllà de  $B$ ) tal que la distància de  $M$  a la recta  $AC$  és igual a  $\overline{AC}$ . En la recta  $AC$  s'agafa el punt  $N$  (més enllà de  $C$ ) tal que la distància de  $N$  a la recta  $AB$  és  $\overline{AB}$ . Determineu la mesura del segment  $\overline{MN}$ .  
Shariguin I265.

Solució:

Siga  $M'$  la projecció de  $M$  sobre la recta  $AC$ ,  $N'$  la projecció de  $N$  sobre la recta  $AB$ .  $\overline{MM'} = \overline{AC}$ ,  $\overline{NN'} = \overline{AB}$ .

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle  $\triangle MM'A$ :  $\overline{AM} = \frac{\overline{AC}}{\sin A}$ .

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle  $\triangle NN'A$ :  $\overline{AN} = \frac{\overline{AB}}{\sin A}$ .

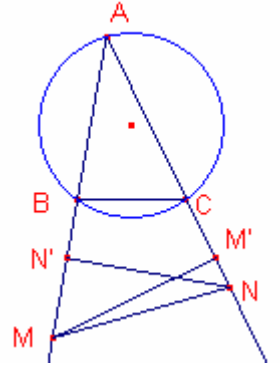
Dividint les expressions:  $\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ .

Aleshores els triangles  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ANM$  són semblants i la raó de semblança és:

$\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{1}{\sin A}$ . Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \frac{1}{\sin A}$ , aleshores,  $\overline{MN} = \frac{a}{\sin A}$ . Aplicant el teorema dels sinus al triangle  $\triangle ABC$ :

$\overline{MN} = \frac{a}{\sin A} = 2R$ .



2.- En el rectangle ABCD,  $\overline{AB} = 4$ ,  $\overline{BC} = 3$ . Determineu el costat del rombe, els vèrtex del qual un és A, els altres es troben en els segments  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  i  $\overline{BD}$ , respectivament. Shariguin I151.

Solució:

Siga el rombe de vèrtexs AEFG.

Siga  $\overline{AE} = x$ .

Siga H la projecció de G sobre el costat  $\overline{AB}$ .

$\overline{HB} = x$ . Siga  $\overline{GH} = h$

Els triangles  $\triangle ABD$ ,  $\triangle HBG$  són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{h}{x} = \frac{3}{4} \quad (1)$$

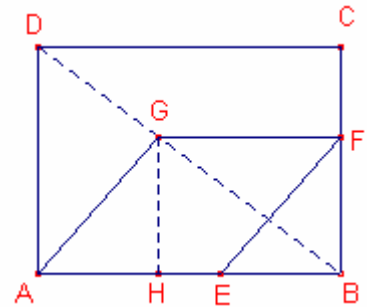
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AHG$ :

$$(4 - x)^2 + h^2 = x^2 \quad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) i (2)

$$\begin{cases} 4h = 3x \\ (4 - x)^2 + h^2 = x^2 \end{cases} \text{ la solució del qual és } \begin{cases} x = \frac{64 - 16\sqrt{7}}{9} \\ h = \frac{16 - 4\sqrt{7}}{3} \end{cases}.$$

Aleshores el costat del rombe és  $x = \frac{64 - 16\sqrt{7}}{9}$ .



3.- Siga donat el segment de longitud  $a$ . Tres circumferències de radi  $R$  tenen els centres en els extrems i en el punt mig del segment. Determineu el radi d'una quarta circumferència que és tangent a les tres circumferències donades. Shariguin I133.

Solució:

Siga el segment  $\overline{AB}$  i  $C$  el seu punt mig.

Suposem resolt el problema el centre de la quarta circumferència ha d'estar a la mateixa distància de  $A$  que de  $B$ , és a dir en la mediatriu del segment  $\overline{AB}$ .

Siga  $O$  el centre.

Per ser la quarta circumferència tangent a la circumferència de centre  $C$  el punt de tangència és la intersecció  $D$  de la mediatriu i la circumferència central.

Siga  $r = \overline{OD}$  el radi de la circumferència.

El triangle  $\triangle ACO$  és rectangle.

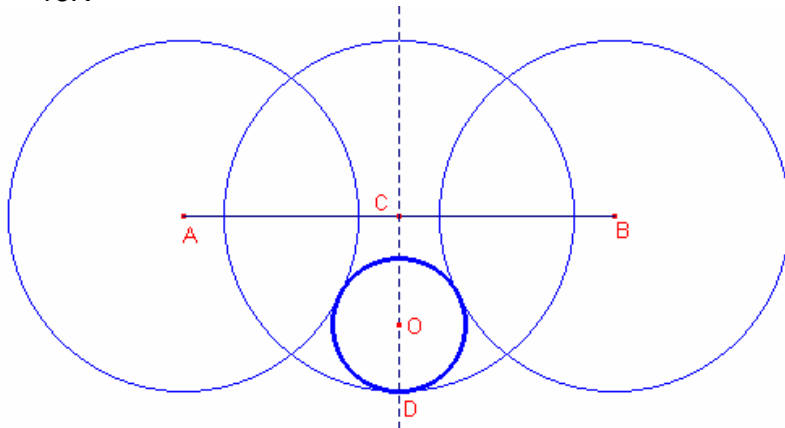
$$\overline{OA} = R + r, \quad \overline{AC} = \frac{a}{2}, \quad \overline{CO} = R - r.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ACO$ :

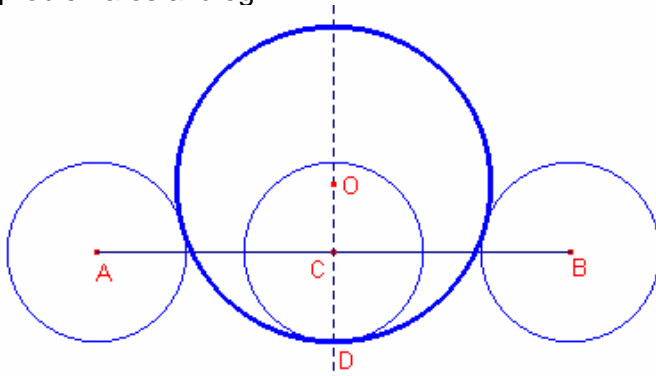
$$(R + r)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (R - r)^2.$$

Resolent l'equació en la incògnita  $r$ :

$$r = \frac{a^2}{16R}.$$

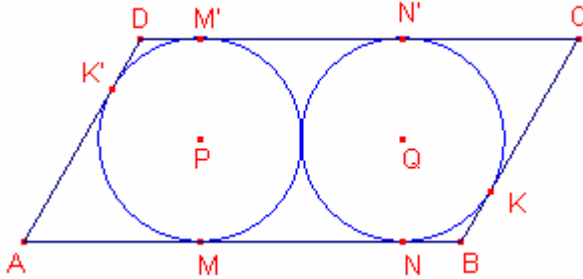


Si el radi  $R$  és menor que  $\frac{a}{4}$  (les tres circumferències inicials no són tangents) el problema és anàleg.



4.- En un paral·lelogram hi ha dues circumferències de radi 1 tangents entre si i amb tres costats dels paral·lelogram cadascuna. Se sap que el segment d'un dels costats del paral·lelogram, entre el vèrtex i el punt de tangència és igual a  $\sqrt{3}$ . Determineu l'àrea del paral·lelogram.  
Shariguin I129.

Solució:



Siga  $\alpha = \angle BAD$  l'angle agut del paral·lelogram.  
L'altre angle del paral·lelogram és  $180^\circ - \alpha$ .  
Siguen P i Q els centres de les circumferències.  
Siguen M, N, K, N', M', K' els punts de tangència.  
 $\overline{MN} = 2$ .

El segment de longitud  $\sqrt{3}$  és el que forma l'angle A ja que  $\triangle AMP$  és un triangle rectangle i  $\angle PAM = \frac{\alpha}{2} \leq 45^\circ$ ,  $\overline{PM} = 1$ .

$$\angle DPM' = \frac{\alpha}{2}.$$

Aleshores els triangles  $\triangle AMP$ ,  $\triangle PM'D$  són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

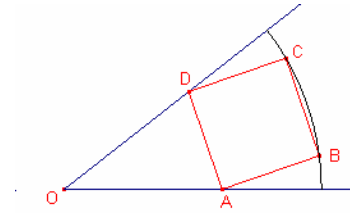
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\overline{DM'}}{1}. \text{ Aleshores, } \overline{DM'} = \overline{BN} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

L'àrea del quadrilàter és:

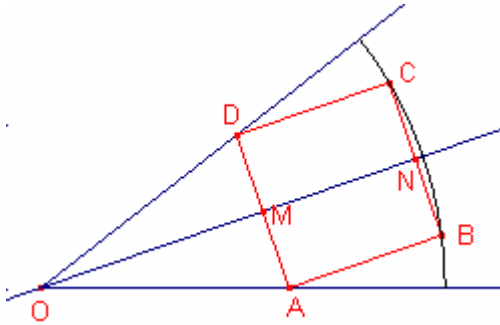
$$S_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{MM'} = (\overline{AM} + \overline{MN} + \overline{BD}) \overline{MM'} = \left( \sqrt{3} + 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) 2 = \frac{12 + 8\sqrt{3}}{3}.$$

5.- S'ha inscrit un quadrat ABCD dins d'un sector circular de radi 1 de manera que hi ha un vèrtex sobre cadascun dels radis frontera i dos vèrtexs sobre l'arc frontera. Si l'angle central val  $2\theta$  determineu el valor de  $\theta$  que fa l'àrea del quadrat màxima.

Cruz Mathematicorum M317



Solució:



Siga  $x = \overline{AB}$  costat del quadrat.

La bisectriu de l'angle que determina el sector tall el quadrat en els punts M, N.

$$\frac{x}{2OM} = \operatorname{tg}\theta, \text{ per tant, } \overline{OM} = \frac{x}{2} \operatorname{ctg}\theta.$$

Considerem el triangle rectangle  $\triangle ANB$ ,

$$\overline{OB} = 1, \overline{NB} = \frac{x}{2}, \overline{ON} = \overline{OM} + \overline{AB} = \frac{x}{2} \operatorname{ctg}\theta + x.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ANB$ :

$$1 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2} \operatorname{ctg}\theta + x\right)^2.$$

Aïllant  $x^2$

$$x^2 = \frac{4}{5 + 4\operatorname{ctg}\theta + \operatorname{ctg}^2\theta} = \frac{4 \sin^2 \theta}{1 + 4 \sin \theta \cos \theta + 4 \sin^2 \theta}.$$

L'àrea del quadrat és  $S(x) = x^2$ ,

$$S(\theta) = \frac{4 \sin^2 \theta}{1 + 4 \sin \theta \cos \theta + 4 \sin^2 \theta}$$

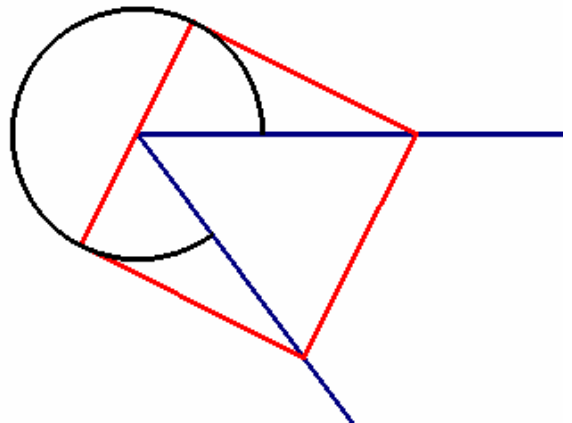
Determinem el màxim de la funció àrea:

$$S'(\theta) = \frac{8 \sin \theta (\cos \theta + 2 \sin \theta)}{(1 + 4 \sin \theta \cos \theta + 4 \sin^2 \theta)}$$

$$S'(\theta) = 0 \text{ si } \theta = 0, 180^\circ, \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{2}\right) \approx 153^\circ 26' 6''.$$

$$S''(0) > 0, S''(\pi) > 0, S''\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{2}\right)\right) < 0.$$

Per tant,  $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{2}\right)$  és el màxim de la funció àrea.



6.- En el triangle  $\triangle ABC$ , siga D el punt d'intersecció de  $\overline{AB}$  amb la bisectriu interior de l'angle C, i siga E el punt mig de  $\overline{AB}$ . Demostreu que  $\overline{CD} + \overline{CE} < \overline{BC} + \overline{AC}$ .  
 Crux Mathematicorum M315.

Solució:

Siga E el punt mig del costat  $\overline{AB}$ .

Siga  $\overline{CD}$  la bisectriu del triangle  $\triangle ABC$ .

Siga  $\overline{CH}$  altura del triangle  $\triangle ABC$

Considerem el punt  $C'$  simètric de C respecte del punt mig E.

$\overline{CE} = \overline{C'E}$ .

$AC'BC$  és un paral·lelogram.

Aplicant la desigualtat triangular al triangle  $\triangle AC'B$ :

$\overline{CC'} < \overline{BC} + \overline{AC}$ . Aleshores:  $\overline{CE} < \frac{\overline{BC} + \overline{AC}}{2}$ .

Suposem que  $A \geq B$ .

El peu de l'altura H està en la semirecta d'origen E i direcció  $\overrightarrow{EA}$ .

La bisectriu referida a un vèrtex del triangle està entre l'altura i la mitjana referida al mateix vèrtex o és una d'aquestes.

El segment  $\overline{CD}$  està dins del triangle rectangle  $\triangle CHE$ .

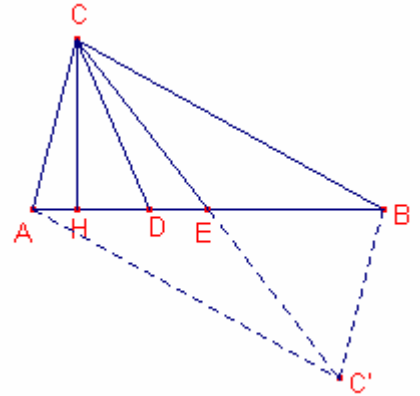
$\angle CDB = 90^\circ + \angle HCD \geq 90^\circ$ .

Considerem el triangle  $\triangle CDE$ . A angle major li correspon costat oposat major.

Aleshores:  $\overline{CD} \leq \overline{CE}$ .  $\overline{CD} \leq \overline{CE} < \frac{\overline{BC} + \overline{AC}}{2}$ .

Aleshores,  $\overline{CD} + \overline{CE} < \overline{BC} + \overline{AC}$ .

Si  $A \leq B$ , el raonament seria anàleg.



7.- La mitjana  $\overline{BK}$  i la bisectriu  $\overline{CL}$  del triangle  $\triangle ABC$  s'intersecten en el punt P.

Demostreu que  $\frac{\overline{PC}}{\overline{PL}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 1$ .

Olimpíada rusa.

Solució:

Per ser K el punt mig del costat  $\overline{AC}$ ,  $\overline{CK} = \overline{AK}$ .

Aplicant el teorema de Menelau al triangle  $\triangle ALC$ :

Els punts B, P i K estan alineats, aleshores,  $\frac{\overline{CK}}{\overline{AK}} \frac{\overline{AB}}{\overline{LB}} \frac{\overline{LP}}{\overline{CP}} = 1$ .

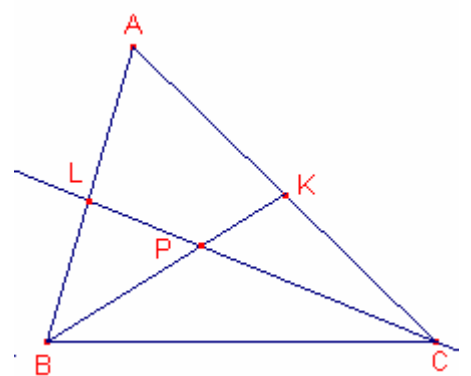
Aleshores,  $\frac{\overline{PC}}{\overline{PL}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{LB}}$  (1)

Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle  $\triangle ABC$ :

$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{BL}}$  (2)

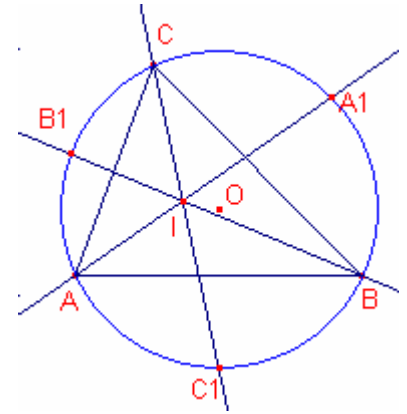
Restant les expressions (1) (2):

$\frac{\overline{PC}}{\overline{PL}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BL}} - \frac{\overline{AL}}{\overline{BL}} = \frac{\overline{AB} - \overline{AL}}{\overline{BL}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{BL}} = 1$ .



8.- Les bisectrius del triangle  $\triangle ABC$  referides als vèrtexs A, B, C s'intersecten amb la circumferència circumscriu en els punts  $A_1, B_1, C_1$ , respectivament. Siga I l'íncentre, R i r els radis de les circumferències circumscriu i inscrite, respectivament. Proveu que

a)  $\frac{\overline{IA_1} \cdot \overline{IC_1}}{\overline{IB}} = R$ .    b)  $\frac{\overline{IA} \cdot \overline{IC}}{\overline{IB_1}} = 2r$ .    c)  $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{2r}{R}$ .



Solució:

Siga O el circumcentre. Pel teorema d'Euler,  $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$ .

Per la propietat dels radis,  $r = 4R \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$ .

Aplicant la potència del punt I respecte de la circumferència:

$$\overline{IA_1} \cdot \overline{IA} = R^2 - \overline{OI}^2 = 2Rr.$$

Anàlogament  $\overline{IB_1} \cdot \overline{IB} = 2Rr$ .  $\overline{IC_1} \cdot \overline{IC} = 2Rr$ .

Notem que  $\sin \frac{A}{2} = \frac{r}{IA}$ ,  $\sin \frac{B}{2} = \frac{r}{IB}$ ,  $\sin \frac{C}{2} = \frac{r}{IC}$ .

a)

$$\begin{aligned} \frac{\overline{IA_1} \cdot \overline{IC_1}}{\overline{IB}} &= \frac{\frac{2Rr}{IA} \cdot \frac{2Rr}{IC}}{\overline{IB}} = \frac{4R^2 r^2}{\overline{IA} \cdot \overline{IB} \cdot \overline{IC}} = \frac{4R^2 r^2}{\frac{r}{\sin \frac{A}{2}} \cdot \frac{r}{\sin \frac{B}{2}} \cdot \frac{r}{\sin \frac{C}{2}}} = \frac{4R^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{r} = \\ &= \frac{Rr}{r} = R. \end{aligned}$$

b)

$$\frac{\overline{IA} \cdot \overline{IC}}{\overline{IB_1}} = \frac{\overline{IA} \cdot \overline{IC}}{\frac{2Rr}{\overline{IB}}} = \frac{\overline{IA} \cdot \overline{IB} \cdot \overline{IC}}{2Rr} = \frac{\frac{r}{\sin \frac{A}{2}} \cdot \frac{r}{\sin \frac{B}{2}} \cdot \frac{r}{\sin \frac{C}{2}}}{2Rr} = \frac{r^2}{2R \cdot \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = 2r.$$

c)

Siga  $a_1 = \overline{B_1C_1}$ ,  $b_1 = \overline{A_1C_1}$ ,  $c_1 = \overline{B_1A_1}$ .

$$\angle IAB = \frac{A}{2}, \angle IBA = \frac{B}{2}, \angle AIB = 90 + \frac{C}{2}.$$

$$\angle IA_1B_1 = \frac{B}{2}, \angle IB_1A_1 = \frac{A}{2}, \angle A_1IB_1 = 90 + \frac{C}{2}.$$

Els triangles  $\triangle BIC$ ,  $\triangle C_1IB_1$  són semblants i la raó de semblança és  $\overline{IB} : \overline{IC_1}$ . Aleshores,

$$\frac{a}{a_1} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IC_1}}.$$

Anàlogament,  $\frac{b}{b_1} = \frac{\overline{IC}}{\overline{IA_1}}$ ,  $\frac{c}{c_1} = \frac{\overline{IA}}{\overline{IB_1}}$ .

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{abc}{4R}}{\frac{a_1b_1c_1}{4R}} = \frac{abc}{a_1b_1c_1} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IC_1}} \cdot \frac{\overline{IC}}{\overline{IA_1}} \cdot \frac{\overline{IA}}{\overline{IB_1}} = \frac{\overline{IA} \cdot \overline{IC}}{\overline{IB_1}} \cdot \frac{\overline{IB}}{\overline{IC_1} \cdot \overline{IA_1}} = 2r \cdot \frac{1}{R} = \frac{2r}{R}.$$

9.- Si  $a, b, c$  són els costats d'un triangle de perímetre 2.

Proveu que  $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$ .

Solució:

$a, b, c \geq 0$  aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} . \text{ Aleshores, } abc \leq \frac{8}{27} .$$

Considerem els vectors,  $(a,b,c), (1,1,1)$ . Aplicant la desigualtat de Cauchy-Schwars:

$$(a,b,c)(1,1,1) \leq \|(a,b,c)\| \cdot \|(1,1,1)\|$$

$$2 = a + b + c \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{3} .$$

$$\text{Aleshores, } a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{4}{3} .$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc \leq \frac{4}{3} + 2 \frac{8}{27} = \frac{36 + 16}{27} = \frac{52}{27} < 2 .$$

10.- La circumferència inscrita al triangle  $\triangle ABC$  talla els costats  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  en els punts M, N, P, respectivament. Si  $\overline{AN} + \overline{BP} + \overline{CM} = \vec{0}$ . Proveu que el triangle  $\triangle ABC$  és equilàter.

Solució:

$$\overline{AM} = \overline{AP} = \frac{-a+b+c}{2}, \quad \overline{BN} = \frac{a-b+c}{2}.$$

Considerem la base del pla real  $\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$ .

$$\overline{BC} = -\overline{AB} + \overline{AC}.$$

$$\overline{AM} = \frac{-a+b+c}{2c} \overline{AB}.$$

$$\overline{BN} = \frac{a-b+c}{2a} \overline{BC}.$$

$$\overline{AP} = \frac{-a+b+c}{2b} \overline{AC}.$$

$$\overline{AN} = \overline{AB} + \overline{BN} = \frac{a+b-c}{2a} \overline{AB} + \frac{a-b+c}{2a} \overline{AC}.$$

$$\overline{BP} = -\overline{AB} + \overline{AP} = -\overline{AB} + \frac{-a+b+c}{2b} \overline{AC}.$$

$$\overline{CM} = -\overline{AC} + \overline{AM} = \frac{-a+b+c}{2c} \overline{AB} - \overline{AC}.$$

$$\overline{AN} + \overline{BP} + \overline{CM} = \left( \frac{a+b-c}{2a} - 1 + \frac{-a+b+c}{2c} \right) \overline{AB} + \left( \frac{a-b+c}{2a} + \frac{-a+b+c}{2b} - 1 \right) \overline{AC} = \vec{0}.$$

Com el sistema de vectors  $\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$  és linealment independent, aleshores:

$$\begin{cases} \frac{a+b-c}{2a} - 1 + \frac{-a+b+c}{2c} = 0 \\ \frac{a-b+c}{2a} + \frac{-a+b+c}{2b} - 1 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Simplificant, } \begin{cases} -a^2 - b^2 + ac + bc = 0 \\ -a^2 - c^2 + ab + bc = 0 \end{cases}.$$

Restant les dues igualtats:  $c^2 - b^2 + ac - ab = 0$ .

$$(a+b+c)(c-b) = 0.$$

Aleshores,  $b = c$ .

Substituint en la primera igualtat:  $-a^2 - c^2 + ac + c^2 = 0$ .

$$\text{Simplificant: } a(c-a) = 0.$$

Aleshores,  $a = c$ .

Per tant, el triangle  $\triangle ABC$  és equilàter.

