Problemes geometria 17

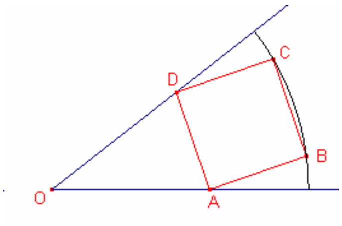
1.- En una circumferència de radi R està inscrit el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. En La recta AB s'agafa el punt M (més enllà de B) tal que la distància de M a la recta AC és igual a $\overline{AC}$. En la recta AC s'afaga el punt N (més enllà de C) tal que la distància de N a la recta AB és $\overline{AB}$. Determineu la mesura del segment $\overline{MN}$. Shariguin I265.

2.- En el rectangle ABCD, $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 3$. Determineu el costat del rombe, els vèrtex del qual un és A, els altres es troben en els segments $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{BD}$, respectivament.
Shariguin I151.

3.- Siga donat el segment de longitud a. Tres circumferències de radis R tenen els centres en els extrems i en el punt mig del segment. Determineu el radi d'una quarta circumferència que és tangent a les tres circumferències donades. Shariguin I133.

4.- En un paral·lelogram hi ha dues circumferències de radi 1 tangents entre si i amb tres costats dels paral·lelogram cadascuna. Se sap que el segment d0un dels costats del paral·lelogram, entre el vèrtex i el punt de tangència és igual a $\sqrt{3}$. Determineu l'àrea del paral·lelogram. Shariguin I129.

5.- S'ha inscrit un quadrat ABCD dins d'un sector circular de radi 1 de manera que hi ha un vèrtex sobre cadascun dels radis frontera i dos vèrtexs sobre l'arc frontera. Si l'angle central val 2θ determineu el valor de θ que fa l'àrea del quadrat màxima.
Cruz Mathematicorum M317



6.- En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, siga D el punt d'intersecció de $\overline{AB}$ amb la bisectriu interior de l'angle C, i siga E el punt mig de $\overline{AB}$. Demostreu que $\overline{CD} + \overline{CE} < \overline{BC} + \overline{AC}$.
Crux Mathematicorum M315.

7.- La mitjana $\overline{BK}$ i la bisectriu $\overline{CL}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ s'intersecten en el punt P.
Demostreu que $\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PL}} - \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 1$. Olimpíada rusa.

8.- Les bisectrius del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ referides als vèrtexs A, B, C s'intersecten amb la circumferència circumscrita en els punts A_1, B_1, C_1, respectivament. Siga I l'incentre, R i r els radis de les circumferències circumscrita i inscrita, respectivament. Proveu que
a) $\dfrac{\overline{IA_1} \cdot \overline{IC_1}}{\overline{IB}} = R$. b) $\dfrac{\overline{IA} \cdot \overline{IC}}{\overline{IB_1}} = 2r$. c) $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{2r}{R}$.

9.- Si a, b, c són els costats d'un triangle de perímetre 2.
Proveu que $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$.

10.- La circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ talla els costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ en els punts M, N, P, respectivament. Si $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$. Proveu que el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és equilàter.