

### Problemes geometria 18

1.- Dues circumferències  $c, c'$  tenen el mateix radi. Prenem dos punts fixos,  $A$  i  $A'$ , a cadascuna d'elles i, a més, hi definim dos punts  $B$  i  $B'$  variables de manera que els

arcs  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{A'B'}$  són iguals. Considerem el punt  $P$  que és el punt mitjà del segment  $\overline{BB'}$ . Demanem:

Qüestió 1:

Quin és el lloc geomètric del punt  $P$  quan  $B$  es mou sobre la circumferència  $c$ , tot

mantenint que els arcs  $\widehat{AB}$  i  $\widehat{A'B'}$  siguin iguals i del mateix sentit.

Qüestió 2:

Quin és el lloc geomètric del punt  $P$  quan  $B$  es mou sobre la circumferència  $c$ , tot

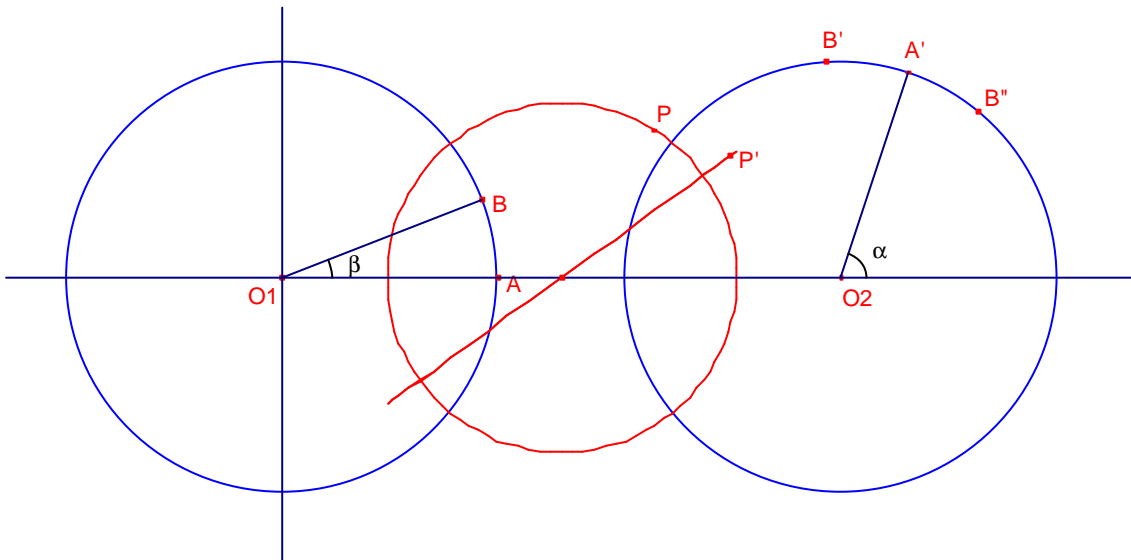
mantenint que els arcs  $\widehat{AB}$  i  $\widehat{A'B'}$  siguin iguals i de sentit contrari.

Solució:

Podem considerar, sense llevar generalització:

Que les circumferències  $c, c'$  són de radi 1 i de centres respectius,  $O_1(0,0)$ ,  $O_2(d,0)$

Que  $A(1,0)$   $A'(d + \cos \alpha, \sin \alpha)$ ,  $B(\cos \beta, \sin \beta)$ .



Qüestió 1:

El punt  $B'$  és igual al gir de centre  $O_2$  del punt  $A'$  i angle  $\beta$ .

$B'(d + (d + \cos \alpha - d)\cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, (d + \cos \alpha - d)\sin \beta + \sin \alpha \sin \beta)$

$B'(d + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \sin \beta)$

$B'(d + \cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$

El punt mig  $P$  del segment  $\overline{BB'}$  és:

$$P\left(\frac{d + \cos(\alpha + \beta) + \cos \beta}{2}, \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin \beta}{2}\right)$$

$$P\left(\frac{d}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos\left(\frac{\alpha + 2\beta}{2}\right), \cos \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\alpha + 2\beta}{2}\right)\right)$$

que és una circumferència de centre  $\left(\frac{d}{2}, 0\right)$  i radi  $\cos \frac{\alpha}{2}$ .

Notem que si  $\alpha = 180^\circ$  el punt P és el punt fix  $P\left(\frac{d}{2}, 0\right)$ .

Si les circumferències són de radi r el lloc geomètric és una circumferència de centre el punt mig dels centres  $O_1, O_2$  i radi  $r \cos \frac{\alpha}{2}$  on  $\alpha$  és l'angle que formen la recta  $O_1O_2$  i la recta  $O_2A'$ .

Qüestió 2:

El punt B'' és igual al gir de centre  $O_2$  del punt A' i angle  $-\beta$ .

$$B''(d + (d + \cos \alpha - d)\cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta), (d + \cos \alpha - d)\sin(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta))$$

$$B''(d + \cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$$

El punt mig P' del segment  $\overline{BB''}$  és:

$$P'\left(\frac{d}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos\left(\frac{\alpha - 2\beta}{2}\right) \sin \frac{\alpha}{2} \cos\left(\frac{\alpha - 2\beta}{2}\right)\right)$$

que és un segment de centre  $\left(\frac{d}{2}, 0\right)$  longitud 2 i inclinació  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

Si les circumferències són de radi r el lloc geomètric és un segment de centre el punt mig dels centres  $O_1, O_2$  longitud 2 i inclinació  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

on  $\alpha$  és l'angle que formen la recta  $O_1O_2$  i la recta  $O_2A'$ .

2.- Siguen els punts fixos B i C d'una circumferència. Siga A un punt variable de la mateixa circumferència. Determineu el lloc geomètric dels peus de les perpendiculars baixades des del punt mig del segment  $\overline{AB}$  sobre el segment  $\overline{AC}$ .  
Shariguin II 76.

Solució:

Considerem la circumferència de centre  $O(a,b)$  i radi  $R = \sqrt{a^2 + b^2}$  que té equació:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2.$$

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2by = 0.$$

Siguen els punts fixos de la circumferència  $B(0,0)$ ,  $C(2a,0)$ .

Siga  $A(c,d)$  un punt variable de la circumferència.

$$\text{Aleshores, } c^2 - 2ac + d^2 - 2bd = 0 \quad (1)$$

Siga M el punt mig del segment  $\overline{AB}$ , les seues coordenades són:

$$M\left(\frac{c}{2}, \frac{d}{2}\right).$$

Determinem el punt  $P(x,y)$  projecció de M sobre el segment  $\overline{AC}$ :

$$\text{Siguen } \overline{MP} = \left(x - \frac{c}{2}, y - \frac{d}{2}\right), \overline{CA} = (c - 2a, d).$$

Aquests vectors són ortogonals per tant:

$$\left(x - \frac{c}{2}, y - \frac{d}{2}\right) \cdot (c - 2a, d) = 0$$

$$cx - 2ax - \frac{c^2}{2} + ac + dy - \frac{d^2}{2} = 0 \quad (2)$$

Substituint l'expressió (1) en (2):

$$cx - 2ax + dy - bd = 0.$$

$$d = \frac{(2a - c)x}{y - b} \quad (3)$$

El punt P pertany a la recta que passa per C, A que té equació:

$$y = \frac{d}{c - 2a}(x - 2a) \quad (4)$$

Substituint l'expressió (3) en (4)

$$y = \frac{(2a - c)x}{c - 2a} \cdot \frac{y - b}{y - b} (x - 2a). \text{ Simplificant:}$$

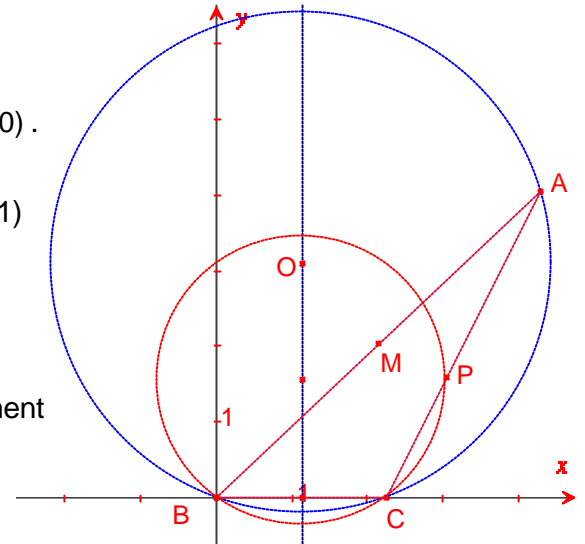
$$y(y - b) = -x(x - 2a).$$

$$y^2 + x^2 - 2ax - by = 0.$$

$$\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + (x - a)^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Aquest lloc és una circumferència de centre  $\left(a, \frac{b}{2}\right)$  i radi  $\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ . Circumferència

que passa per B, C, el centre de la qual dista de la recta AB la meitat de la distància del centre de la circumferència inicial a la recta AB.



3.- Siga el trapezi ABCD de costats paral·lels  $\overline{AB}$  i  $\overline{DC}$  i les diagonals  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$  es tallen en P.

a) si l'àrea del triangle  $\triangle APB$  és 4 i la del triangle  $\triangle DPC$  és 9.

(i) Demostreu que  $\overline{AP} : \overline{PC} = 2 : 3$ .

(ii) Expliqueu perquè la raó de les superfícies dels triangles  $\triangle BPC$  i  $\triangle BPA$  és igual a 3 : 2.

(iii) Determineu l'àrea del trapezi ABCD.

b) Si l'àrea del triangle  $\triangle APB$  és x i la del triangle  $\triangle DPC$  és y Determineu l'àrea del trapezi ABCD en funció de x, y.

Crux Mathematicorum M331

Solució:

a)

(i)

Els triangles  $\triangle APB$ ,  $\triangle DPC$  són semblants, la raó de proporcionalitat és igual a l'arrel quadrada de la proporció de les àrees.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} = \sqrt{\frac{S_{APB}}{S_{DPC}}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

(ii)

Dos triangles que tenen la mateixa altura la bases són proporcionals a les àrees.

Els triangles  $\triangle BPC$ ,  $\triangle BPA$  tenen la mateixa altura, aleshores:

$$\frac{S_{BPC}}{S_{APB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{AP}} = \frac{3}{2}.$$

Anàlogament:

$$\frac{S_{DPC}}{S_{DPA}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{AP}} = \frac{3}{2}.$$

(iii)

$$S_{BPC} = \frac{3}{2} S_{APB} = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6.$$

$$S_{DPA} = \frac{2}{3} S_{DPC} = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6.$$

$$S_{ABCD} = S_{DPC} + S_{APB} + S_{BPC} + S_{DPA} = 9 + 4 + 6 + 6 = 25.$$

b)

Siga  $x = S_{APB}$ ,  $y = S_{DPC}$ .

Anàlogament que en l'apartat (aii)

$$\frac{S_{BPC}}{S_{APB}} = \sqrt{\frac{y}{x}}, \quad \frac{S_{DPC}}{S_{DPA}} = \sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$S_{BPC} = \sqrt{\frac{y}{x}} S_{APB} = \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot x = \sqrt{xy}.$$

$$S_{DPA} = \sqrt{\frac{x}{y}} S_{DPC} = \sqrt{\frac{x}{y}} \cdot y = \sqrt{xy}.$$

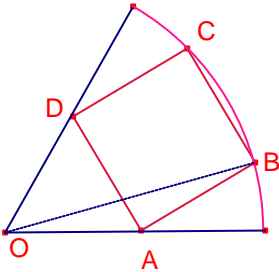
Aleshores:

$$S_{ABCD} = S_{DPC} + S_{APB} + S_{BPC} + S_{DPA} = y + x + \sqrt{xy} + \sqrt{xy} = x + y + 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2.$$

4.- Un quadrat de costat  $s$  està inscrit simètricament en un sector de circumferència de radi  $r$  i angle central  $60^\circ$ , té dos vèrtex en l'arc circular i dos en els costats que formen els radis del sector. Determineu el valor exacte de  $\frac{s}{r}$ .

Crux Mathematicorum M281.

Solució:



Per la simetria de la figura.

$\overline{OA} = \overline{OD}$ ,  $\angle AOD = 60^\circ$ , aleshores, el triangle  $O\overset{\Delta}{A}D$  és equilàter, per tant:

$$\overline{OA} = \overline{OD} = \overline{AD} = s.$$

$$\overline{OB} = r.$$

$\overline{OA} = \overline{AB} = s$ , aleshores el triangle  $O\overset{\Delta}{A}B$  és isòsceles.

$$\angle OAB = \angle OAD + \angle DAB = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ.$$

$$\angle BOA = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

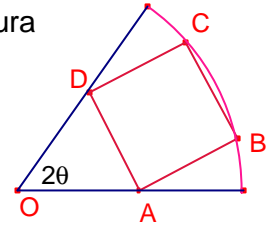
Aplicant el teorema dels sinus al triangle  $O\overset{\Delta}{A}B$ :

$$\frac{r}{\sin 150^\circ} = \frac{s}{\sin 15^\circ}.$$

$$\frac{s}{r} = \frac{\sin 15^\circ}{\sin 150^\circ} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

5.- Siga el quadrat ABCD inscrit en un sector circular de radi 1 que té dos vèrtexs en l'arc i dos sobre els radis frontera (veure figura). Si l'angle central mesura  $2\theta$ , determineu el valor  $\theta$  que fa l'àrea del quadrat màxima.  
Crux Mathematicorum M317.

Solució:



Siga  $x = \overline{AB} = \overline{AD}$  el costat del quadrat.

L'àrea del quadrat és  $S = x^2$ .

Siga M el punt mig del costat  $\overline{AD}$ .

$0 \leq 2\theta \leq \pi$ , aleshores,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

$$\angle OAD = \frac{180^\circ - 2\theta}{2} = 90^\circ - \theta.$$

$$\angle OAB = 180^\circ - \theta.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle  $\triangle OMA$ :

$$\overline{OA} = \frac{x}{2 \sin \theta}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle OAB$ :

$$1^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2 \sin \theta}\right)^2 - 2x \frac{x}{2 \sin \theta} \cos(180^\circ - \theta).$$

$$x^2 = \frac{4 \sin^2 \theta}{4 \sin^2 \theta + 4 \sin \theta \cdot \cos \theta + 1}.$$

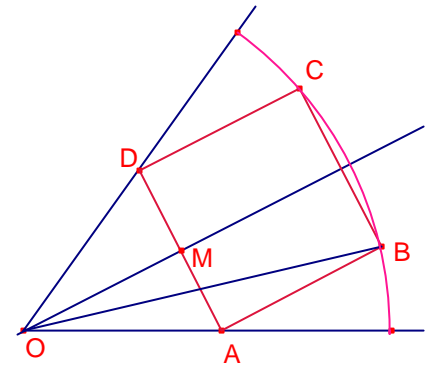
Considerem la funció:

$$f(\theta) = \frac{4 \sin^2 \theta}{4 \sin^2 \theta + 4 \sin \theta \cdot \cos \theta + 1}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$f'(\theta) = \frac{8 \sin \theta (\cos \theta + 2 \sin \theta)}{(4 \sin^2 \theta + 4 \sin \theta \cdot \cos \theta + 1)^2}.$$

$f'(\theta) > 0$ ,  $\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Aleshores la funció és creixent en el domini.

El màxim s'assoleix quan  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , és a dir, quan el sector és la semicircumferència.



6.- Considerem el con de revolució amb una esfera inscrita tangent a la base del con. Circumscrivim a aquesta esfera un cilindre de forma que una de les bases siga la base del con. Siguen  $V_1, V_2$  els volums del con i del cilindre, respectivament.

a) Proveu que  $V_1 \neq V_2$ .

b) Trobeu el menor  $k$  a fi que  $V_1 = k \cdot V_2$ . En aquest cas determineu l'angle que forma la base del con i la seua generatriu.

Oposicions Aragó 2006.

Solució:

Siga  $R$  i  $h$ , el radi i l'altura del con.

Siga  $r$  el radi de l'esfera i el radi del cilindre.

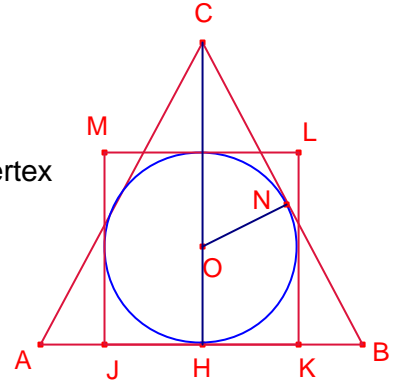
Siga  $\triangle ABC$  la secció del con perpendicular a la base que passa el vèrtex  $C$ .

Siga  $\overline{CH} = h$  altura del triangle.

Siga  $O$  el centre de l'esfera.

Siga  $JKLM$  el quadrat secció del cilindre.

Siga  $N$  la projecció de  $O$  sobre  $\overline{BC}$ ,  $\overline{ON} = r$ .



Els triangles rectangles  $\triangle CHB$ ,  $\triangle CON$  són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{r}{h-r} = \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}, \text{ aleshores, } r = \frac{hR}{R+\sqrt{R^2+h^2}}.$$

Calculem els volums del con i del cilindre:

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

$$V_2 = \pi r^2 2r = 2\pi \left( \frac{hR}{R+\sqrt{R^2+h^2}} \right)^3.$$

a)

Suposem que existeix  $R, h$  tal que  $V_1 = V_2$

$$\frac{2\pi \left( \frac{hR}{R+\sqrt{R^2+h^2}} \right)^3}{\frac{1}{3} \pi R^2 h} = 1. \text{ Simplificant:}$$

$$\frac{h^2 R}{\left( R+\sqrt{R^2+h^2} \right)^3} = \frac{1}{6}.$$

$$\frac{\left( \frac{h}{R} \right)^2}{\left( 1+\sqrt{1+\left( \frac{h}{R} \right)^2} \right)^3} = \frac{1}{6}.$$

Considerem la funció  $f(x) = \frac{x^2}{(1 + \sqrt{1+x^2})^3}$ ,  $x \in ]0, +\infty[$ .

La funció és contínua i derivable en el seu domini.

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)^2 (4\sqrt{1+x^2} - x^2 - 4)}{x^5 \sqrt{1+x^2}}$$

$f'(x) > 0$  quan  $x \in ]0, 2\sqrt{2}[$ , en aquest interval la funció és creixent.

$f'(x) < 0$  quan  $x \in ]2\sqrt{2}, +\infty[$ , en aquest interval la funció és decreixent.

$f'(x) = 0$  si  $x = 2\sqrt{2}$ , aleshores, és un màxim de la funció.

$$f(2\sqrt{2}) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8} < \frac{1}{6}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(1 + \sqrt{1+x^2})^3} \leq \frac{1}{8} < \frac{1}{6}$$

$$\text{Aleshores, } \frac{\left(\frac{h}{R}\right)^2}{\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{h}{R}\right)^2}\right)^3} < \frac{1}{6}$$

Per tant, el volum del con i el cilindre no poden ser mai iguals.

b)

Siga  $V_1 = k \cdot V_2$

$$\frac{1}{k} = \frac{2\pi \left(\frac{hR}{R + \sqrt{R^2 + h^2}}\right)^3}{\frac{1}{3}\pi R^2 h}, \text{ per l'apartat a) la funció } f(x) = \frac{x^2}{(1 + \sqrt{1+x^2})^3} \leq \frac{1}{8}$$

El valor menor de  $k$  s'assoleix en el màxim de la funció  $f(x)$ .

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{8} \text{ quan } x = \frac{h}{R} = 2 + \sqrt{2}$$

És a dir quan  $k = 8$  i  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{R} = 2 + \sqrt{2}$  o  $\alpha$  és l'angle que forma la base del con i la seua generatriu.

$$\alpha \approx 70^\circ 31' 44''$$

7.- Siga el quadrilàter ABCD inscrit en una circumferència en què  $\overline{AB} = \overline{BC}$ . Siga K el punt intersecció de les diagonals. Determineu la longitud del costat  $\overline{AB}$  si  $\overline{BK} = b$ ,  $\overline{DK} = d$ .  
Shariguin I194.

Solució:

Siga  $a = \overline{AB}$ .

Siga E el punt mig del segment  $\overline{AC}$ .

El triangle  $\triangle ABC$  és isòsceles.

Siga  $\alpha = \angle BAC = \angle BCA$ .

Per ser angles inscrits i abraçar el mateix arc:

$\angle ADB = \angle ACB = \alpha$ .

Siga  $x = \overline{AK}$ .

Aplicant la potència de K respecte de la circumferència:

$$\overline{AK} \cdot \overline{CK} = \overline{BK} \cdot \overline{DK} = bd.$$

$$\text{Aleshores, } \overline{CK} = \frac{bd}{x}.$$

$$\overline{AC} = \overline{AK} + \overline{CK} = x + \frac{bd}{x}.$$

$$\overline{AE} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{x^2 + bd}{2x}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle  $\triangle AEB$ :

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{x^2 + bd}{2ax}.$$

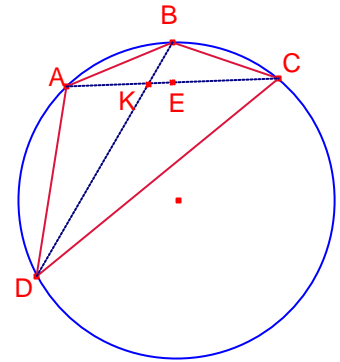
Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle ABK$ :

$$b^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cdot \cos \alpha.$$

$$b^2 = a^2 + x^2 - 2ax \frac{x^2 + bd}{2ax}. \text{ Simplificant:}$$

$$a^2 = b^2 + bd.$$

$$a = \overline{AB} = \sqrt{b^2 + bd}.$$



8.- Siga el triangle  $\triangle ABC$ . Siga R el punt mig del costat  $\overline{BC}$ . Siga S un punt del costat  $\overline{AC}$  tal que  $\overline{CS} = 4 \cdot \overline{SA}$ . Siga T un punt del costat  $\overline{AB}$  tal que l'àrea del triangle  $\triangle RST$  és el doble de l'àrea del triangle  $\triangle TBR$ . Calculeu  $\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}}$ .

Crux Mathematicorum 28-1 pàg. 2.

Solució:

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Siga X l'àrea del triangle  $\triangle TBR$ . Siga S l'àrea del triangle  $\triangle ABC$ .

Aleshores,  $S_{TRC} = X$ .

$$S_{ARC} = \frac{S}{2}.$$

$$S_{SRC} = \frac{4}{5} S_{ARC} = \frac{2}{3} S.$$

$$S_{AST} = S - 3X - \frac{2}{5} S = \frac{3}{5} S - 3X.$$

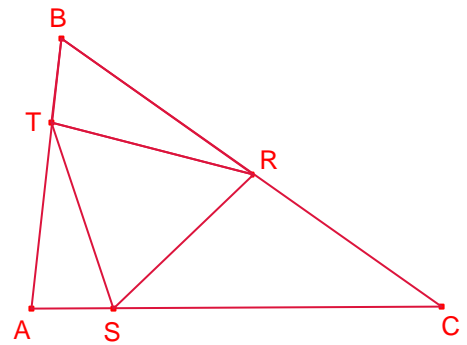
$$S_{ATC} = 5S_{AST} = 3S - 15X$$

$$S_{BTC} = S_{ABC} - S_{ATC} = S - (3S - 15X) = -2S + 15X.$$

$$S_{BTC} = 2S_{TBR} = 2X.$$

Aleshores,  $-2S + 15X = 2X$ , aleshores,  $S = \frac{13}{2} X$ .

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \frac{S_{ATC}}{S_{BTC}} = \frac{3S - 15X}{2X} = \frac{9}{4}.$$



9.- Siguen 4 esferes d'igual radi  $R$ , cadascuna tangent a les altres tres. Determineu el radi de dues esferes que són simultània tangents a les quatre esferes.  
CruX Mathematicorum M31.

Solució:

Siga  $r$  el radi de l'esfera interior tangent a les 4 esferes de radi  $R$ .

El centre d'aquesta dista  $R + r$  dels centres de les quatre esferes inicials.

Els centres de les quatre esferes inicials formen un tetràedre regular d'aresta  $2R$ .

El centre de l'esfera tangent a les 4 està en el centre del tetràedre anterior. (el centre del tetràedre és el centre de l'esfera circumscrita al tetràedre.

El radi  $R_1$  de l'esfera circumscrita a un tetràedre en funció de l'aresta  $a$  és:

$$R_1 = \frac{\sqrt{6}}{4} a.$$

En aquest cas:

$$R + r = \frac{\sqrt{6}}{4} 2R.$$

Aleshores el radi de l'esfera tangent interior a les 4 esferes inicials és:

$$r = \left( \frac{\sqrt{6}}{2} - 1 \right) R.$$

Siga  $S$  el radi de l'esfera exterior tangent a les 4 esferes de radi  $R$ .

El centre d'aquesta dista  $S - R$  dels centres de les quatre esferes inicials.

En aquest cas:

$$S - R = \frac{\sqrt{6}}{4} 2R.$$

Aleshores el radi de l'esfera tangent exterior a les 4 esferes inicials és:

$$S = \left( \frac{\sqrt{6}}{2} + 1 \right) R.$$

10.- Una corda de 6 cm de longitud divideix la circumferència en dos segments circulars. En el menor està inscrit un quadrat el costat del qual mesura 2cm. Determineu el radi de la circumferència.  
Gúsiev 195.

Solució:

Siga  $\overline{AB}$  la corda i PQRS el quadrat inscrit en el segment de circumferència.

$$\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB} = 2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle APS$ :

$$\overline{AS} = 2\sqrt{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AQR$ :

$$\overline{AQ} = 2\sqrt{5}.$$

Siga  $\alpha = \angle SAR$ .

Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle ARS$ :

$$2^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \cos \alpha.$$

$$\cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}. \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Siga  $r$  el radi de la circumferència inicial.

La circumferència inicial és circumscrita al triangle  $\triangle ARS$ . Aplicant el teorema del sinus a aquest triangle:

$$\frac{2}{\sin \alpha} = 2r \quad \text{Aleshores, } r = \sqrt{10} \text{ cm.}$$

