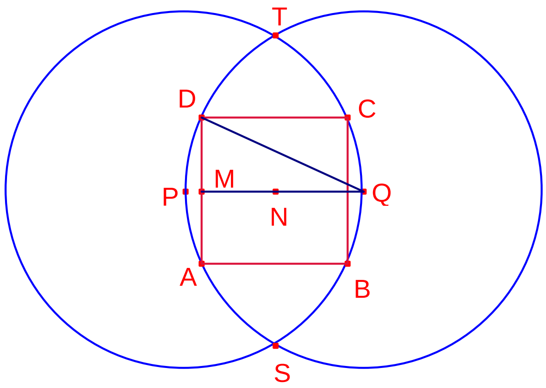
Problemes de Geometria 19

1.- Dos cercles de radi R estan situats de forma que els centres estan a una distància igual a R. En la intersecció dels dos cercles està inscrit un quadrat. Determineu la longitud del costat. Calculeu la proporció entre les àrees del quadrat i l'àrea de la intersecció dels cercles.
Gúsiev 196, G291



Solució:
Siguen P, Q els centres dels cercles $\overline{PQ}=R$.
Siga ABCD el quadrat inscrit el la intersecció dels dos cercles.
Siga $\overline{AB}=c$. $\overline{QD}=R$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$.
$\overline{MQ}=\frac{c+R}{2}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MQD}$.
$R^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{c+R}{2}\right)^2$. Resolent l'equació en la incògnita c:
$c=\frac{\sqrt{7}-1}{2}R$.

L'àrea del quadrat és:
$S_{ABCD}=c^2=\frac{4-\sqrt{7}}{2}R^2$.

Siguen S, T els punts intersecció de les dues circumferències.
$\angle TPS=120^\circ$.
L'àrea de la intersecció és el doble de diferència entre les àrees del sector circular de centre P i radis $\overline{PT},\overline{PS}$ i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PTS}$.
El sector circular la seua àrea mesura la tercera part del cercle (el sector abraça un arc de 120º).
Aleshores la superfície de la intersecció de les dues circumferències és:
El triangle $\overset{\Delta}{PTS}$ té la mateixa àrea que el triangle equilàter de costat R.

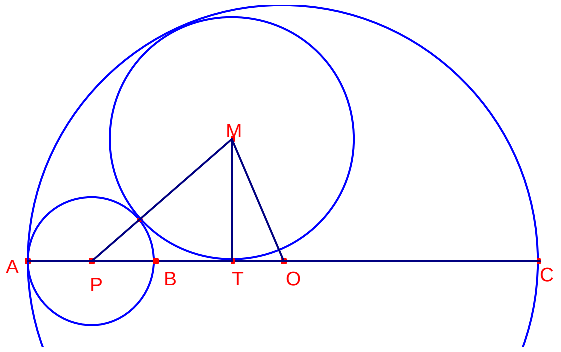
$$S_{inter}=2\left(\frac{1}{3}\pi R^2-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{6}R^2.$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{inter}}=\frac{\frac{4-\sqrt{7}}{2}R^2}{\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{6}R^2}=\frac{3\left(4-\sqrt{7}\right)}{4\pi-3\sqrt{3}}.$$

2.- En un segment $\overline{AC}$ de 12cm de longitud s'agafa el punt B tal que $\overline{AB} = 4cm$. En els segments $\overline{AC}, \overline{AB}$ com diàmetres es dibuixen dues circumferències. Determineu el radi de la circumferència tangent a les dues circumferències i al segment $\overline{AC}$.
Gúsiev 203.

Solució:

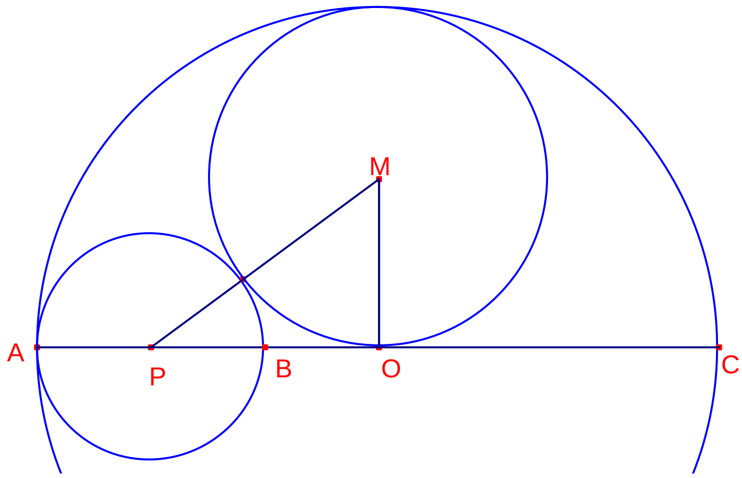


Siga P el punt mig del segment $\overline{AB}$, centre de la circumferència de diàmetre $\overline{AB}$.
Siga O el punt mig del segment $\overline{AC}$, centre de la circumferència de diàmetre $\overline{AC}$.

Siga r el radi de la circumferència tangent a les dues anteriors i al segment $\overline{AC}$.
Siga M el seu centre i T el punt de tangència amb el segment $\overline{AC}$.
$\overline{PM} = 2 + r$, $\overline{MT} = r$, $\overline{MO} = 6 - r$.
Siga $x = \overline{OT}$. $\overline{PT} = 4 - x$.

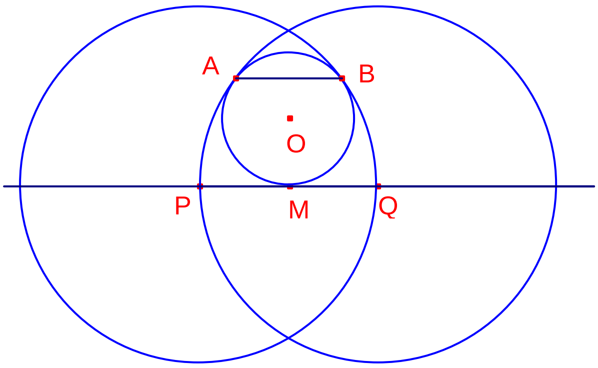
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{OTM}$:
$(6-r)^2 = x^2 + r^2$ (1)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{PTM}$:
$(2+r)^2 = (4-x)^2 + r^2$ (2)
Resolent el sistema format per les equacions (1) (2):
$\begin{cases} x = 0 \\ r = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 6 \\ r = 0 \end{cases}$ la segona solució és impossible.
Resultat real:



3.- Dos cercles de radi a estan situats de forma que els centres estan a una distància igual a a. La intersecció dels dos cercles està dividida per la recta que uneix els centre per dos triangles curvilinis en un dels quals està inscrita una circumferència. Determineu la longitud del segment que uneix els punts de tangència de la circumferència inscrita amb les dues circumferències donades.
Gúsiev 206.

Solució:



Siguen P, Q els centres dels cercles $\overline{PQ} = a$.
Siga r el radi de la circumferència que cerquem i siga O el seu centre.
Siga M el punt mig del segment $\overline{PQ}$.
Siga $x = \overline{AB}$ el segment de tangència.
$\overline{QA} = a$, $\overline{OQ} = a - r$. $\overline{OM} = r$
$\overline{MQ} = \frac{a}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMQ}$:

$(a-r)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r = \frac{3}{8}a$.

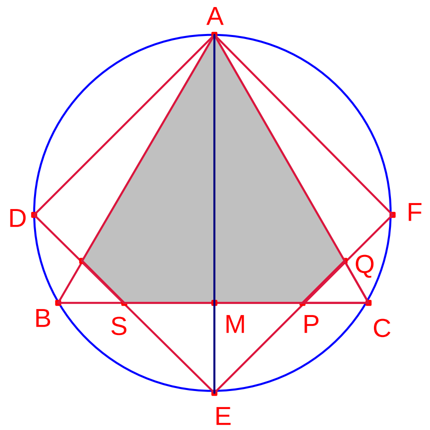
Els triangles $\overset{\Delta}{PQO}$, $\overset{\Delta}{ABO}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{x}{a} = \frac{r}{a-r}$.

$\frac{x}{a} = \frac{\frac{3}{8}a}{a - \frac{3}{8}a}$. Resolent l'equació en la incògnita x:

$x = \frac{3}{5}a$.

4.- En un cercle de radi R està inscrit un triangle equilàter i un quadrat que tenen un vèrtex comú. Determineu l'àrea de la intersecció del triangle i el quadrat.
Gúsiev 277.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi R.

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ inscrit en la circumferència.
Siga el quadrat ADEF inscrit en la circumferència.
$\overline{DF} = 2R$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ADF}$:
$\overline{AF} = R\sqrt{2}$.

Siga $\overline{AM}$ mitjana del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
$\overline{OA} = R$. Aplicant la propietat del baricentre:
$\overline{AM} = \frac{3}{2}R$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:
$\overline{AC} = R\sqrt{3}$.
$\angle CAF = 15^o$.

El segment $\overline{EF}$ talla els costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ en els punts P, Q. (veure figura).

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AFQ}$:

$\overline{AQ} = \frac{\overline{AF}}{\cos 15^o} = \frac{R\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}} = \left(2\sqrt{3}-2\right)R$. $\overline{FQ} = \overline{AF} \cdot \mathrm{tg}15^o = R\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right) = \left(2\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)R$.

$\overline{CQ} = \overline{AC} - \overline{AQ} = \left(2-\sqrt{3}\right)R$.

$\overline{EM} = \overline{OE} - \overline{OM} = R - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DFA}$, $\overset{\Delta}{SPE}$ són semblants (triangles rectangles isòsceles i la raó de semblança és 2:1

Aleshores, $\overline{PS} = \frac{1}{2}\overline{DF} = \frac{1}{2}R$.

$\overline{PC} = \frac{\overline{BC} - \overline{PS}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}R$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PCQ}$ és:

$$S_{PCQ} = \frac{\overline{PC} \cdot \overline{CQ} \cdot \sin 60^o}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}R\left(2-\sqrt{3}\right)R\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{9-5\sqrt{3}}{8}R^2.$$

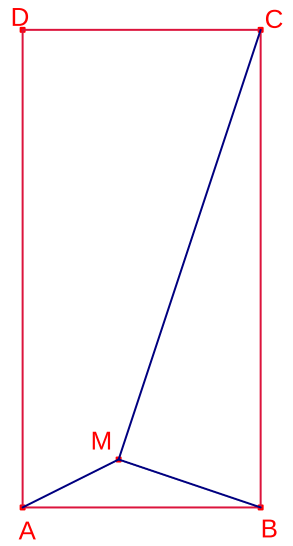
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AC}^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

Calculem l'àrea de la intersecció de les àrees del quadrat i del triangle:

$$S = S_{ABC} - 2 \cdot S_{PCQ} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 - \frac{9-5\sqrt{3}}{4}R^2 = \frac{8\sqrt{3}-9}{4}R^2.$$

5.- En l'interior d'un rectangle ABCD s'agafa el punt M de forma que $\overline{AM}=\sqrt{2}$, $\overline{BM}=2$, $\overline{CM}=6$. Determineu l'àrea del rectangle ABCD si sabem que $\overline{AD}=2\overline{AB}$.
Gúsiev 271.



Solució:
Siga $x=\overline{AB}$, $\overline{AD}=\overline{BC}=2x$.
L'àrea del rectangle és $S_{ABCD}=2x^2$.
Siga $\alpha=\angle ABM$:

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$\left(\sqrt{2}\right)^2=2^2+x^2-2\cdot 2\cdot x\cdot\cos\alpha$.

$-2=x^2-4x\cdot\cos\alpha$ (1)

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCM}$:

$6^2=2^2+(2x)^2-2\cdot 2\cdot 2x\cdot\cos(90^\circ-\alpha)$.

$8=x^2-2x\cdot\sin\alpha$ (2)

$\sin\alpha=\dfrac{x^2-8}{2x}$

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{-x^4+20x^2-64}}{2x}$ (3)

Substituint l'expressió (3) en l'expressió (1):

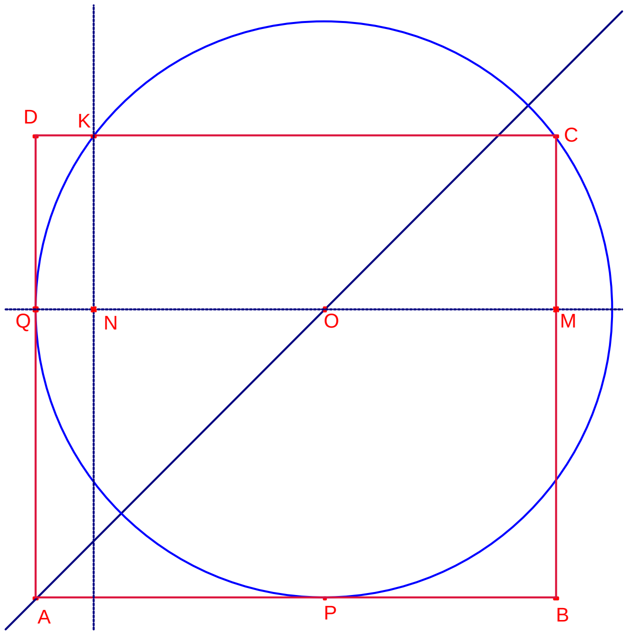
$-2=x^2-4x\cdot\dfrac{\sqrt{-x^4+20x^2-64}}{2x}$. Resolent l'equació en la incògnita x^2:

$x=10,\ \dfrac{26}{5}$

Aleshores l'àrea del rectangle és:

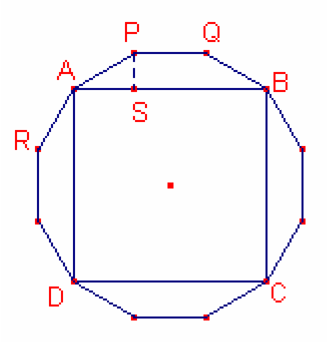
$S_{ABCD}=2x^2=20$, o bé, $S_{ABCD}=2x^2=\dfrac{52}{5}$.

6.- Una circumferència és tangent als costat $\overline{AB},\overline{AD}$ d'un rectangle ABCD i passa pel vèrtex Ci tallla el costat $\overline{CD}$ en el punt K. Determineu l'àrea del quadrilàter ABKD si $\overline{AB}=9cm$ i $\overline{AD}=8cm$.
Gúsiev 270.



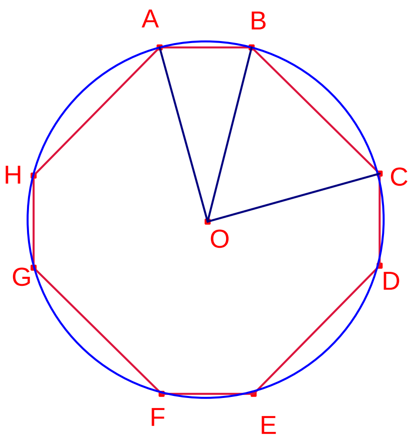
Solució:
El centre O de la circumferència esta en la bisectriu de l'angle $\angle DAB$.
$\angle OAB = 45^{o}$.
Siguen P, Q els punts de tangència de la circumferència i el rectangle.
Siga $\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OC}=R$ radi de la circumferència.
Notem que APOQ és un quadrat.
La recta QO talla el costat $\overline{BC}$ en el punt M.
Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMC}$,
$\overline{OM}=9-R$, $\overline{CM}=8-R$.
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$R^2=(9-R)^2+(8-R)^2$. Resolent l'equació:
$R=5$.
La recta perpendicular a la recta QO que passa per K talla la recta QO en el punt N.
Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{KNO}$. $\overline{KN}=8-R=3$, $\overline{OK}=R=5$.
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{ON}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.
$\overline{QN}=\overline{DK}=R-\overline{ON}=5-4=1$.
El quadrilàter ABKD és un trapezi, la seua superfície és:
$$S_{ABKD}=\frac{\overline{AB}+\overline{DK}}{2}\overline{AD}=\frac{9+1}{2}8=40cm^2.$$

7.- Donat un quadrat de costat a, sobre el seu exterior es dibuixen trapezis de forma que les bases superiors i els costats no paral·lels formen un dodecàgon regular. Determineu l'àrea del dodecàgon.
Gúsiev 275.



Solució:
Siga el quadrat ABC de costat $a=\overline{AB}$.
Siga el trapezi ABQP tal que $\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QB}=x$.
L'angle del dodecàgon regular mesura: $\angle PAR=180^{\circ}\frac{12-2}{12}=150^{\circ}$.
$$\angle PAB=\frac{\angle PAR-\angle BAD}{2}=\frac{150^{\circ}-90^{\circ}}{2}=30^{\circ}.$$
Aleshores, l'altura del trapezi és $\overline{PS}=x\sin 30^{\circ}=\frac{x}{2}$.
$$\overline{AS}=\frac{a-\overline{PQ}}{2}=\frac{a-x}{2}.$$
Aplicant el teorema de PItàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ASP}$:
$x^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{a-x}{2}\right)^2$. Resolent l'equació en la incògnita x:
$$x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}a.$$
L'àrea del trapezi ABQP és:
$$S_{ABQP}=\frac{\overline{AB}+\overline{PQ}}{2}\overline{PS}=\frac{a+x}{2}\frac{x}{2}=\frac{a+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)a}{2}\frac{\sqrt{3}-1}{4}a=\frac{1}{8}a^2.$$
La superfície del dodecàedre és:
$$S=S_{ABCD}+4\cdot S_{ABQP}=a^2+4\frac{1}{8}a^2=\frac{3}{2}a^2.$$

8.- Una circumferència està dividida en 8 part A, B, C, D, E, F, G, H. És conegut que $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{GH}$, $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{FG} = \overset{\frown}{HA}$, $\overset{\frown}{AB} = 2 \cdot \overset{\frown}{BC}$. Si l'àrea del cercle és $289\pi cm^2$ determineu l'àrea de l'octògon.
Gúsiev 276.



Solució:
Siga O el centre de la circumferència i R el seu radi.
Com que la superfície el cercle és $289\pi cm^2$:
$289\pi = \pi R^2$.
Aleshores, $R = 17cm$
Siga $x = \angle BOC$. $\angle AOB = 2x$.
La suma de tots els angles centrals del octògon és 360º, aleshores:
$4x + 4(2x) = 360^o$. Resolent l'equació:
$x = 30^o$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCO}$ és:

$$S_{BCO} = \frac{R^2 \sin 30^o}{2} = \frac{17^2}{4}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABO}$ és:

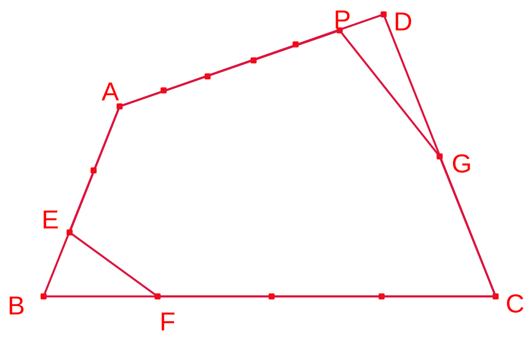
$$S_{ABO} = \frac{R^2 \sin 60^o}{2} = \frac{17^2\sqrt{3}}{4}.$$

L'àrea de l'octògon és:

$$S = 4 \cdot S_{ABO} + 4 \cdot S_{BCO} = 17^2\left(\sqrt{3} + 1\right)cm^2.$$

9.- L'àrea del quadrilàter ABCD és igual a $12cm^2$. En els costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$. S'agafen els punts E, F, G, H, respectivament tal que, $\overline{AE}:\overline{EB}=2:1$, $\overline{BF}:\overline{FC}=1:3$, $\overline{CG}:\overline{GD}=1:1$, $\overline{DH}:\overline{HA}=1:5$. Determineu l'àrea de l'hexàgon AEFCGH.
Gúsiev 279.

Solució:
Siga $X=S_{EBF}$, $Y=S_{GDH}$.
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases, aleshores:



$S_{EFC}=3S_{EBF}=3X$.

$S_{EBC}=4X$.

$S_{AEC}=2\cdot S_{BEC}=8X$.

$S_{ABC}=12X$.

$S_{HAG}=5S_{GDH}=5Y$.

$S_{ADG}=6Y$.

$S_{AGC}=S_{ADG}=6Y$.

$SS_{ADC}=12Y$.

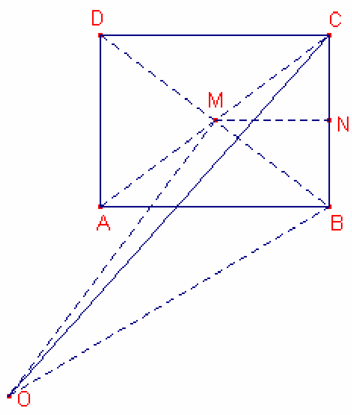
$S_{AEFCGH}=11X+11Y$.

$S_{ABCD}=12X+12Y=12$.

Aleshores, $X+Y=1cm^2$.

$S_{AEFCGH}=11(X+Y)=11cm^2$.

10.- L'àrea del rectangle ABCD és igual a 48cm^2 i la diagonal 10cm. El punt O està allunyat 13cm dels vèrtexs B i C. Calculeu la distància del punt O fins el vèrtex del rectangle més allunyat de O.
Gúsiev 309.



Solució:
Siga $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $a \geq b$, costats del rectangle.
Aplicant l'àrea del rectangle:
$ab = 48$ (1)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$a^2 + b^2 = 10^2$ (2)
Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):
$\begin{cases} ab = 48 \\ a^2 + b^2 = 100 \end{cases}$ la solució del sistema és $\begin{cases} a = 8 \\ b = 6 \end{cases}$.
Suposem que O i A estan en el mateix semiplànol que determina la recta BD.
Volem calcular la distància entre els punts O i C.
O pertany a la mediatriu del segment $\overline{BD}$.
Siga M el punt d'intersecció de les diagonals.

$\overline{OB} = 13$, $\overline{MB} = 5$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:
$\overline{OM} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

El triangle $\overset{\Delta}{BCM}$ és isòsceles.
Siga N el punt mig del costat $\overline{BC}$.
$\overline{MC} = 5$, $\overline{MN} = 4$, $\overline{NC} = 4$.
Siga $\alpha = \angle CMN$.
$\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Aleshores, $\sin 2\alpha = 2\frac{3}{5}\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MNC}$:
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CMO}$:
$\overline{OC}^2 = 12^2 + 5^2 - 2 \cdot 12 \cdot 5 \cdot \cos(90° + 2\alpha)$.
$\overline{OC}^2 = 169 + 120 \cdot \sin 2\alpha$
$\overline{OC}^2 = 169 + 120\frac{24}{25}$.
Aleshores, $\overline{OC} = \frac{7\sqrt{145}}{5}$.