

Problemes de Geometria 2

1.- Siga el triangle equilàter $\triangle ABC$. Siga P un punt en l'arc menor \widehat{BC} de la circumferència circumscripca al triangle $\triangle ABC$. El segment \overline{AP} talla en el punt D el costat \overline{BC}

Proveu que $\frac{1}{PD} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

Solució:

Siga el triangle equilàter $\triangle ABC$, $a = \overline{AB}$.

Els triangles $\triangle BDA$, $\triangle BPA$ són semblants ($\angle ABD = \angle APB = 60^\circ$, $\angle BAD = \angle BAP$), aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AD}}{a}, \text{ aleshores, } \frac{1}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AD}}{a \cdot \overline{BD}} \quad (1)$$

Els triangles $\triangle ADC$, $\triangle APC$ són semblants ($\angle ACD = \angle APC = 60^\circ$, $\angle DAC = \angle PAC$), aplicant el teorema de Tales:

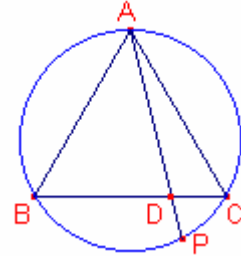
$$\frac{\overline{CD}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AD}}{a}, \text{ aleshores, } \frac{1}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AD}}{a \cdot \overline{CD}} \quad (2)$$

Els triangles $\triangle ADC$, $\triangle BPD$ són semblants ($\angle ACD = \angle BPD = 60^\circ$, $\angle DAC = \angle DBP$), aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}, \text{ aleshores, } \frac{1}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD} \cdot \overline{CD}} \quad (3)$$

Sumem les expressions (1), (2) i utilitzant l'expressió (3):

$$\frac{1}{\overline{PB}} + \frac{1}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AD}}{a} \left(\frac{1}{\overline{BD}} + \frac{1}{\overline{CD}} \right) = \frac{\overline{AD}}{a} \left(\frac{\overline{BD} + \overline{CD}}{\overline{BD} \cdot \overline{CD}} \right) = \frac{\overline{AD}}{a} \cdot \frac{a}{\overline{BD} \cdot \overline{CD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD} \cdot \overline{CD}} = \frac{1}{\overline{PD}}$$



2.- Siga el triangle $\triangle ABC$. Siga D un punt del costat \overline{BC} tal que $\overline{CD} = 2 \cdot \overline{BD}$ i siga E un punt del costat \overline{AC} tal que $\overline{AE} = \frac{3}{2} \overline{CE}$. Si l'àrea del triangle $\triangle CED$ és 8cm^2 , calculeu

l'àrea del triangle $\triangle ABC$.

Solució:

Denotarem $[XYZ]$ com l'àrea del triangle $\triangle XYZ$.

Siga $x = \overline{BD}$, $2x = \overline{CD}$, $2y = \overline{CE}$, $3y = \overline{AE}$.

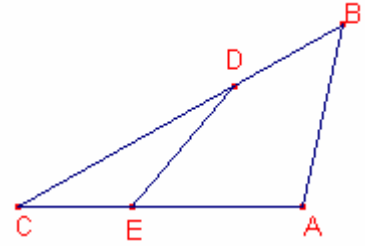
Els triangle $\triangle CED$ i $\triangle EAD$ tenen la mateixa altura, aleshores, les seues àrees són proporcionals als costats:

$$\frac{[EAD]}{[CED]} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} = \frac{3y}{2y}, \text{ aleshores, } [DEA] = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12\text{cm}^2.$$

Els triangle $\triangle DAB$ i $\triangle CAD$ tenen la mateixa altura, aleshores, les seues àrees són proporcionals als costats:

$$\frac{[DAB]}{[CAD]} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{x}{2x}, \text{ aleshores, } [DAB] = \frac{1}{2}([CDE] + [EAD]) = \frac{1}{2}(8 + 12) = 10\text{cm}^2.$$

$$[ABC] = [CDE] + [EAD] + [DAB] = 8 + 12 + 10 = 30\text{cm}^2.$$



3.- En un triangle qualsevol $\triangle ABC$ $r \cdot r_a \leq \frac{a^2}{4}$ on r és en radi de la circumferència inscrita i r_a és en radi de la circumferència exinscrita tangent al costat a .

Solució:

Siga p el semiperímetre del triangle $\triangle ABC$.

Siga I el centre de la circumferència inscrita.

Siga J el centre de la circumferència exinscrita.

Siga D el punt de tangència de la circumferència inscrita i el costat b .

Siga E el punt de tangència de la circumferència exinscrita i la prolongació del costat b .

$$\overline{CD} = p - c.$$

$$\overline{AE} = p.$$

$$\overline{CE} = \overline{AE} - \overline{AC} = p - b.$$

$$\overline{DE} = \overline{CD} + \overline{CE} = p - c + p - b = 2p - (b + c) = (a + b + c) - (b + c) = a.$$

Notem que $\overline{IJ} \geq r + r_a$.

La igualtat es dona quan $\overline{AB} = \overline{AC}$.

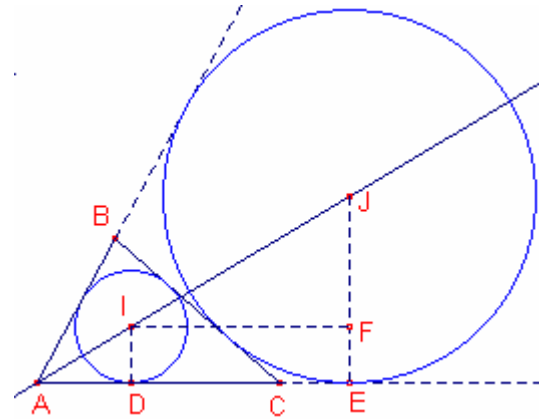
Considerem el triangle rectangle $\triangle IFJ$ tal que F pertany al segment \overline{JE} .

$$(r + r_a)^2 \leq \overline{IJ}^2 = \overline{IF}^2 + \overline{JF}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{JF}^2 = a^2 + (r_a - r)^2. \text{ Simplificant:}$$

$$2r \cdot r_a \leq a^2 - 2r \cdot r_a. \text{ Aleshores:}$$

$$r \cdot r_a \leq \frac{a^2}{4}.$$

La igualtat s'assoleix quan el triangle $\triangle ABC$ és isòceles, essent a el costat desigual.



4.- Siga el triangle acutangle $\triangle ABC$, $\overline{AB} = 10\text{cm}$, $\overline{AC} = 14\text{cm}$. Siguen \overline{AH} altura, \overline{AV} bisectriu, \overline{AM} mitjana, tal que $\overline{HV} = \overline{MV}$. Calculeu l'àrea del triangle $\triangle ABC$.

Solució:

En qualsevol triangle la bisectriu està entre l'altura i la mitjana.

Siga $x = \overline{HV} = \overline{MV}$, $y = \overline{BH}$. Aleshores, $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BM} = 4x + 2y$.

Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{10}{x+y} = \frac{14}{3x+y}. \text{ Simplificant: } 4x - y = 0 \quad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle BHA$:

$$\overline{AH}^2 = 10^2 - y^2 \quad (2)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AHC$:

$$\overline{AH}^2 = 14^2 - (y + 4x)^2 \quad (3)$$

Igualant les expressions (2), (3):

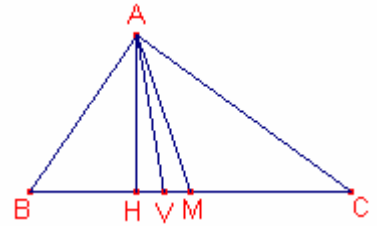
$$10^2 - y^2 = 14^2 - (y + 4x)^2 \quad (4)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (4):

$$\begin{cases} 4x - y = 0 \\ 2x^2 + xy - 12 = 0 \end{cases}, \text{ la solució del qual és: } \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 4\sqrt{2} \end{cases}.$$

$$\overline{BC} = 4x + 2y = 12\sqrt{2}. \quad \overline{AH} = \sqrt{10^2 - y^2} = \sqrt{68}.$$

$$S_{ABC} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AH}}{2} = \frac{12\sqrt{2} \cdot \sqrt{68}}{2} = 12\sqrt{34}\text{cm}^2.$$



5.- Siga el triangle $\triangle ABC$ i M el punt mig del costat \overline{AB} .

Si $\angle CAM + \angle MCB = 90^\circ$, aleshores, el triangle $\triangle ABC$ és rectangle o isòsceles.

Solució:

Siga $\alpha = \angle CAM$, $\beta = \angle MCB$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle CMB$: $\frac{c}{2\sin\beta} = \frac{\overline{CM}}{\sin B}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AMC$:

$$\frac{c}{2\sin(180^\circ - (C - \beta))} = \frac{\overline{CM}}{\sin\alpha}.$$

Dividint ambdues expressions: $\frac{\sin(C - \beta)}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin B}$ (1)

Notem que $C = 180^\circ - (\alpha + B)$. Per hipòtesi $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Aleshores, $C - \beta = 180^\circ - (\alpha + B) - \beta = 180^\circ - B - (\alpha + \beta) = 180^\circ - B - 90^\circ = 90^\circ - B$

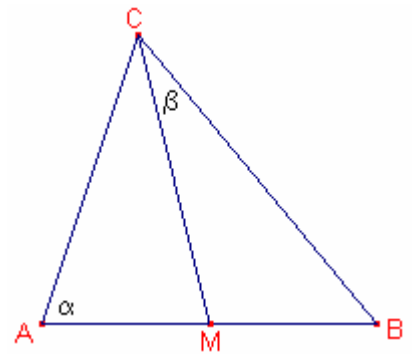
Substituint en l'expressió (1):

$$\frac{\sin(90^\circ - B)}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\sin B}. \text{ Aleshores, } \frac{\cos B}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin B}.$$

Per tant, $\sin 2B = \sin 2\alpha$. Aleshores, $B = \alpha$, o bé $B = 90^\circ - \alpha$.

En el primer cas, $B = \alpha$ el triangle $\triangle ABC$ és isòsceles.

En el segon cas, $B = 90^\circ - \alpha$. $C = 180^\circ - (\alpha + B) = 90^\circ$, el triangle $\triangle ABC$ és rectangle.



6.- Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$. Siga D el punt mig del costat \overline{BC} . Siga F el punt mig de \overline{AB} , E el punt mig de \overline{AF} , G el punt mig de \overline{FB} . Siga P la intersecció de \overline{AD} i \overline{CE} . Siga Q la intersecció de \overline{AD} i \overline{CF} . Siga R la intersecció de \overline{AD} i \overline{CG} . Calculeu la raó $\frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}}$.

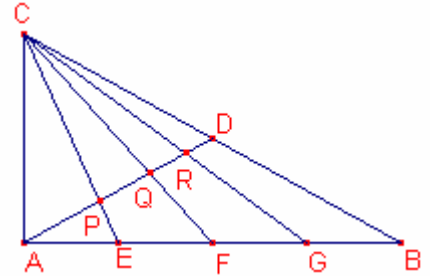
Solució:

La mitjana sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle mesura la meitat que la hipotenusa, aleshores, el triangle

$\triangle ADC$ és isòsceles. $\angle CAD = C$.

Siga $\alpha = \angle CEA$, $\beta = \angle CFA$, $\gamma = \angle CGA$.

$\angle DAE = 90^\circ - C$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle CAE$:

$$\overline{CE} = \sqrt{b^2 + \left(\frac{c}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{16b^2 + c^2}}{4}. \quad \cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{16b^2 + c^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{4b}{\sqrt{16b^2 + c^2}}.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AEP$:

$$\frac{\overline{AP}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AE}}{\sin(180^\circ - (90^\circ - C + \alpha))}, \quad \overline{AP} = \frac{\overline{AE} \sin \alpha}{\cos(\alpha - C)} = \frac{\frac{c}{4} \frac{4b}{\sqrt{16b^2 + c^2}}}{\frac{c}{\sqrt{16b^2 + c^2}} \frac{b}{a} + \frac{4b}{\sqrt{16b^2 + c^2}} \frac{c}{a}} = \frac{a}{5}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle CAF$:

$$\overline{CF} = \sqrt{b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4b^2 + c^2}}{2}. \quad \cos \beta = \frac{c}{\sqrt{4b^2 + c^2}}, \quad \sin \beta = \frac{2b}{\sqrt{4b^2 + c^2}}.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AFQ$:

$$\frac{\overline{AQ}}{\sin \beta} = \frac{\overline{AF}}{\sin(180^\circ - (90^\circ - C + \beta))}, \quad \overline{AQ} = \frac{\overline{AF} \sin \beta}{\cos(\beta - C)} = \frac{a}{3}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle CAG$:

$$\overline{CG} = \sqrt{b^2 + \left(\frac{3c}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{16b^2 + 9c^2}}{4}. \quad \cos \gamma = \frac{3c}{2\sqrt{16b^2 + 9c^2}}, \quad \sin \gamma = \frac{4b}{\sqrt{16b^2 + 9c^2}}.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AGR$:

$$\frac{\overline{AR}}{\sin \gamma} = \frac{\overline{AG}}{\sin(180^\circ - (90^\circ - C + \gamma))}, \quad \overline{AR} = \frac{\overline{AG} \sin \gamma}{\cos(\gamma - C)} = \frac{3a}{7}.$$

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{AQ} - \overline{AP}}{\overline{AR} - \overline{AQ}} = \frac{\frac{a}{3} - \frac{a}{5}}{\frac{3a}{7} - \frac{a}{3}} = \frac{7}{5}.$$

7.- Siga el triangle acutangle $\triangle ABC$. Siguen \overline{AD} , \overline{BE} , \overline{CF} les altures del triangle. Siga H l'ortocentre. Demostreu que $\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BH}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CH}}{\overline{CF}} = 2$.

Solució:

Denotem $[XYZ]$ = àrea del triangle XYZ .

Si el triangle és acutangle H pertany a l'interior del triangle.

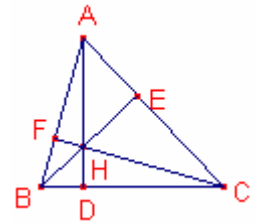
$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BH}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CH}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{AD} - \overline{HD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BE} - \overline{HE}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CF} - \overline{HF}}{\overline{CF}} = 3 - \left(\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{HE}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{HF}}{\overline{CF}} \right) \quad (1)$$

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle HBC$ tenen la mateixa base \overline{BC} , aleshores, les àrees són proporcionals a les altures:

$$\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}} = \frac{[HBC]}{[ABC]}. \text{ Anàlogament, } \frac{\overline{HE}}{\overline{BE}} = \frac{[HCA]}{[ABC]}, \quad \frac{\overline{HF}}{\overline{CF}} = \frac{[HAB]}{[ABC]}.$$

Substituint en l'expressió (1):

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BH}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CH}}{\overline{CF}} &= 3 - \left(\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{HE}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{HF}}{\overline{CF}} \right) = 3 - \left(\frac{[HBC]}{[ABC]} + \frac{[HCA]}{[ABC]} + \frac{[HAB]}{[ABC]} \right) = \\ &= 3 - \frac{[HBC] + [HCA] + [HAB]}{[ABC]} = 3 - \frac{[ABC]}{[ABC]} = 2. \end{aligned}$$



8.- Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$. Siguen \overline{BD} , \overline{CE} bisectrius. Siga I l' incentre.

Determineu la relació entre les àrees del triangle $\triangle IBC$ i del quadrilàter BCDE.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$ i siga r el radi de la circumferència inscrita. El radi de la circumferència inscrita d'un triangle rectangle és igual al semiperímetre menys la hipotenusa. Aleshores:

$$r = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{-a+b+c}{2}.$$

L'àrea del triangle $\triangle IBC$ és:

$$S_{IBC} = \frac{a \cdot r}{2} = \frac{(-a+b+c)a}{4}.$$

Aplicant la propietat de la bisectriu a \overline{BD} :

$$\frac{c}{AD} = \frac{a}{b-AD}, \text{ aleshores, } \overline{AD} = \frac{bc}{a+c}.$$

Aplicant la propietat de la bisectriu a \overline{CE} :

$$\frac{b}{AE} = \frac{a}{c-AE}, \text{ aleshores, } \overline{AE} = \frac{bc}{a+b}.$$

L'àrea del triangle $\triangle AED$ és:

$$S_{AED} = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{AD}}{2} = \frac{b^2c^2}{2(a+b)(a+c)}.$$

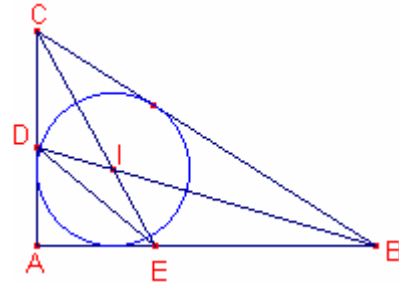
L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és $S_{ABC} = \frac{bc}{2}$.

L'àrea del quadrilàter BCDE és:

$$S_{BCDE} = S_{ABC} - S_{AED} = \frac{bc}{2} - \frac{b^2c^2}{2(a+b)(a+c)}.$$

Calculem la proporció entre les àrees del triangle $\triangle IBC$ i del quadrilàter BCDE:

$$\begin{aligned} \frac{S_{IBC}}{S_{BCDE}} &= \frac{(-a+b+c)a}{4 \left(\frac{bc}{2} \left(1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} \right) \right)} = \\ &= \frac{(-a+b+c)a}{2bc \frac{(a+b)(a+c) - bc}{(a+b)(a+c)}} = \frac{(-a+b+c)a(a+b)(a+c)}{2bc(a^2 + ac + ab)} = \\ &= \frac{(-a+b+c)(a+b)(a+c)}{2bc(a+b+c)} = \frac{(-a+b+c)(a^2 + ab + ac + bc)}{2bc(a+b+c)} = \\ &= \frac{(-a+b+c)(a(a+b+c) + bc)}{2bc(a+b+c)} = \frac{a((b+c)^2 - a^2) + bc(-a+b+c)}{2bc(a+b+c)} = \\ &= \frac{a(2bc) + bc(-a+b+c)}{2bc(a+b+c)} = \frac{bc(a+b+c)}{2bc(a+b+c)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



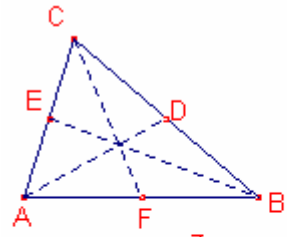
9.- Calculeu la raó entre les àrees d'un triangle i el triangle format per les seues mitjanes.

Solució:

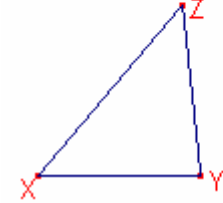
Siga el triangle $\triangle ABC$ de mitjanes \overline{AD} , \overline{BE} , \overline{CF} .

L'àrea del triangle utilitzant la fórmula d'Heró és:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}}{4}. \end{aligned}$$



$XY=AD$
 $XZ=BE$
 $YZ=CF$



àreaXYZ= 2,43 cm²
àreaABC= 3,24 cm²
prop. àrees= 0,75

La fórmula de les mitjanes en funció dels costats és:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \quad m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}, \quad m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

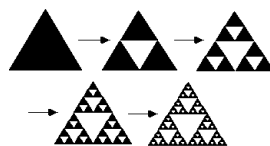
Siga $\triangle XYZ$ el triangle tal que $\overline{XY} = \overline{AD}$, $\overline{XZ} = \overline{BE}$, $\overline{YZ} = \overline{CF}$.

L'àrea del triangle de costats formats per les mitjanes és:

$$\begin{aligned} S_{XYZ} &= \frac{\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(-m_a + m_b + m_c)(m_a - m_b + m_c)(m_a + m_b - m_c)}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{((m_b - m_c)^2 - m_a^2)(m_a^2 - (m_b - m_c)^2)}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{4m_b^2 m_c^2 - (m_b^2 + m_c^2 - m_a^2)^2}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{4 \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} - \left(\frac{5a^2 - b^2 - c^2}{4} \right)^2}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{\frac{-9a^4 - 9b^4 - 9c^4 + 18a^2b^2 + 18a^2c^2 + 18b^2c^2}{4^2}}}{4} = \\ &= \frac{3}{4} \frac{\sqrt{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}}{4}. \end{aligned}$$

La raó entre les àrees dels dos triangles és:

$$\frac{S_{XYZ}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4}.$$



10.- En un triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$, siga \overline{AD} l'altura sobre la hipotenusa. Siga I_1 l' incentre del triangle $\triangle ADC$, I_2 l' incentre del triangle $\triangle ADB$. Calculeu els angles del triangle $\triangle ABC$ si la suma de les distàncies de I_1, I_2 a l'altura \overline{AD} és igual a $\frac{a}{4}$.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$, suposem $b \leq c$.

Els triangles $\triangle ADC$, $\triangle ADB$ són rectangles i semblants al triangle $\triangle ABC$.

L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és:

$$\frac{a \cdot \overline{AD}}{2} = \frac{bc}{2}, \text{ aleshores, } \overline{AD} = \frac{bc}{a} \quad (1)$$

Siga r_1 el radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle ADC$.

Siga r_2 el radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle ADB$.

La suma de les distàncies de I_1, I_2 a l'altura \overline{AD} és:

$$\overline{I_1Q} + \overline{I_2P} = r_1 + r_2. \text{ Per hipòtesi, } \overline{I_1Q} + \overline{I_2P} = \frac{a}{4} \quad (2)$$

El radi de la circumferència inscrita d'un triangle rectangle és igual al semiperímetre menys la hipotenusa. Aleshores:

$$r_1 = \frac{\overline{AD} + \overline{CD} + b}{2} - b, \quad r_2 = \frac{\overline{AD} + \overline{BD} + c}{2} - c.$$

$$r_1 + r_2 = \frac{\overline{AD} + \overline{CD} + b}{2} - b + \frac{\overline{AD} + \overline{BD} + c}{2} - c = \frac{2 \cdot \overline{AD} + a - b - c}{2}.$$

Substituint les expressions (1) i (2):

$$\frac{a}{4} = \frac{2 \frac{bc}{a} + a - b - c}{2}. \text{ Simplificant:}$$

$$a^2 + 4bc - 2a(b + c) = 0.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores:

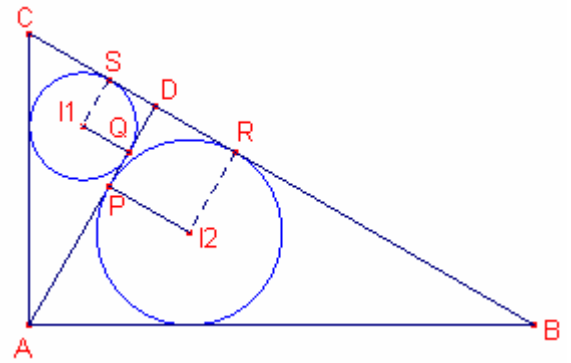
$$b^2 + c^2 + 4bc = 2(b + c)\sqrt{b^2 + c^2} = 0. \text{ Elevant al quadrat:}$$

$$b^4 + c^4 + 2b^2c^2 + 8b^3c + 8bc^3 = 4(b^2 + c^2 + 2bc)(b^2 + c^2). \text{ Simplificant:}$$

$$3b^4 - 10b^2c^2 + 3c^4 = 0. \text{ Resolent l'equació en la incògnita b:}$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{3}c.$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ aleshores, } B = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = 30^\circ, C = 90^\circ - B = 60^\circ.$$



11.- En qualsevol triangle $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}$ essent vàlida la igualtat quan el triangle és equilàter. A més a més, $0 < \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

Solució:

$$\sqrt{a^2 - (b-c)^2} \leq a \Leftrightarrow \sqrt{(a+b-c)(a-b+c)} \leq a.$$

Aleshores:

$$\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)} \leq a.$$

$$\sqrt{(-a+b+c)(a+b-c)} \leq b.$$

$$\sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)} \leq c.$$

Multipliant les desigualtats:

$$\sqrt{(a+b-c)^2(a-b+c)^2(-a+b+c)^2} \leq abc. \text{ Simplificant:}$$

$$(a+b-c)(a-b+c)(a+b-c) \leq abc \quad (1)$$

$$a+b-c = a+b+c-2c = 2p-2c = 2(p-c).$$

$$a-b+c = a+b+c-2b = 2p-2b = 2(p-b).$$

$$-a+b+c = a+b+c-2a = 2p-2a = 2(p-a).$$

Substituint en (1):

$$8(p-a)(p-b)(p-c) \leq abc.$$

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}.$$

La igualtat és vàlida quan les desigualtats inicials es transformen en igualtats, és a dir, quan $b=c$, $a=c$, és a dir quan el triangle és equilàter.

Demostrem que $0 < \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) &= \frac{1-\cos A}{2} = \frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc} = \\ &= \frac{a^2+(b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc} = \frac{(p-c)(p-b)}{bc}. \end{aligned}$$

$$\text{per tant, } \sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\text{Anàlogament: } \sin\left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \quad \sin\left(\frac{C}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

$$0 < \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}{a^2b^2c^2}} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \leq \frac{abc}{8abc} = \frac{1}{8}.$$



12.- En un triangle isòsceles $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC}$, siga \overline{BD} la bisectriu tal que $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{AD}$.
 Calculeu l'angle A. (Problema resolt en Crux Mathematicorum).

Solució (Jimmy Chui):

Siga $B = C = 2\alpha$. Aleshores $A = 180^\circ - 4\alpha$.

Construïm el punt E en el costat \overline{BC} tal que $\overline{DE} = \overline{CE}$.

El triangle $\triangle CDE$ $\angle CDE = 2\alpha$.

Aleshores el quadrilàter ABED és cíclic ja que els angles oposats són suplementaris.

Els angles $\angle ABD$, $\angle DBE$ són iguals, aleshores les cordes que abracen són iguals, per tant $\overline{AD} = \overline{DE}$.

Aleshores, $\angle DAE = \angle AED = \alpha$.

$$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{AD} = \overline{BD} + \overline{DE} = \overline{BD} + \overline{CE} \quad (1)$$

$$\overline{BC} = \overline{BE} + \overline{CE} \quad (2)$$

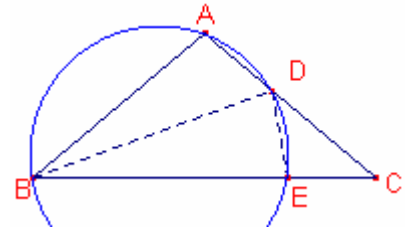
De les relacions (1) (2) tenim que:

$\overline{BD} = \overline{BE}$. Aleshores el triangle $\triangle BED$ és isòsceles, $\angle BDE = \angle BED$.

$$\angle BED = 180^\circ - \angle DEC = 180^\circ - (180^\circ - 4\alpha) = 4\alpha.$$

$$\angle BDE = \frac{360^\circ - (\widehat{BD} + \widehat{DE})}{2} = \frac{360^\circ - (8\alpha + 2\alpha)}{2} = 180^\circ - 5\alpha$$

$4\alpha = 180^\circ - 5\alpha$. Resolent l'equació: $\alpha = 20^\circ$. Aleshores, $A = 180^\circ - 4\alpha = 100^\circ$.



13.- Els quadrats dels costats d'un triangle $\triangle ABC$ són proporcionals a 1, 2, 3.
 Demostreu que el triangle $\triangle ABC$ i el triangle format per les mitjanes són semblants i
 que els angles formats per les mitjanes són iguals als angles del triangle $\triangle ABC$.

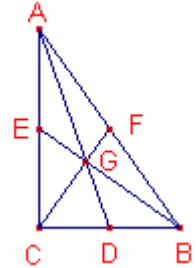
Solució:

Siga $a^2 = k$, $b^2 = 2k$, $c^2 = 3k$ (els quadrats dels costats són proporcionals a 1, 2, 3).

Notem que el triangle $\triangle ABC$ és rectangle. $c^2 = a^2 + b^2$.

Els costats del triangle $\triangle ABC$ mesuren: $a = \sqrt{k}$, $b = \sqrt{2k}$, $c = \sqrt{3k}$.

Els angles de $\triangle ABC$ són $C = 90^\circ$, $\cos A = \frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{3k}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos B = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{3k}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



a)

Siguen les mitjanes $m_a = \overline{AD}$, $m_b = \overline{BE}$, $m_c = \overline{CF}$. Siga G el baricentre.

Calculem les mitjanes amb la fórmula de la mitjana en funció dels costats:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \frac{4k + 6k - k}{4} = \frac{9}{4}k, \quad m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} = \frac{2k + 6k - 2k}{4} = \frac{6}{4}k,$$

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} = \frac{2k + 4k - 3k}{4} = \frac{3}{4}k.$$

Les mitjanes del triangle $\triangle ABC$ mesuren: $m_a = \frac{3}{2}\sqrt{k}$, $m_b = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{k}$, $m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{k}$.

Provem que el triangle de costats a , b , c és proporcional al triangle de costats m_c , m_b , m_a .

$$\frac{a}{m_c} = \frac{\sqrt{k}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{k}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{b}{m_b} = \frac{\sqrt{2k}}{\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{k}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{c}{m_a} = \frac{\sqrt{3k}}{\frac{3}{2}\sqrt{k}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Aleshores els triangles són semblants i la raó de semblança és $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

b)

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{CG} = \frac{2}{3}m_c = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{k}, \quad \overline{BG} = \frac{2}{3}m_b = \frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{k}, \quad \overline{GD} = \frac{1}{3}m_a = \frac{1}{2}\sqrt{k}.$$

Notem que $\triangle CGB$ és rectangle, ja que $\overline{CG}^2 + \overline{BG}^2 = \overline{BC}^2$, aleshores, $\angle CGB = C = 90^\circ$.

Aplicant el teorema del cosinus als triangle $\triangle DGB$ i $\triangle CGD$:

$$\cos \angle DGB = \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{k}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)^2}{-2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{k} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \cos A.$$

$$\cos \angle CGD = \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{k}\right)^2}{-2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{k} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \cos B.$$

14.- Si en un triangle $\triangle ABC$ la mitjana $m_a = \frac{b\sqrt{3}}{2}$ i la bisectriu $v_c = \frac{c\sqrt{3}}{2}$ aleshores el triangle és equilàter.

Solució:

Siga el triangle $\triangle ABC$.

La fórmula de la mitjana d'un triangle en funció dels costats és:

$$m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}.$$

Aleshores, $\left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$. Simplificant:

$$a^2 + b^2 - 2c^2 = 0.$$

$$c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \quad (1)$$

La fórmula de la bisectriu d'un triangle en funció dels costats és:

$$v_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

Aleshores, $\left(\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}$.

$$\frac{3}{4}c^2 = \frac{ab((a+b)^2 - c^2)}{(a+b)^2} \quad (2)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2):

$$\frac{3}{4} \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{ab \left((a+b)^2 - \frac{a^2 + b^2}{2} \right)}{(a+b)^2}.$$

$$\frac{3}{8}(a^2 + b^2) = \frac{ab}{2(a+b)^2}(a^2 + b^2 + 4ab).$$

$$3(a^2 + b^2)(a+b)^2 = 4ab(a^2 + b^2 + 4ab).$$

$$3a^4 + 2ba^3 - 10b^2a^2 + 2b^3a + 3b^4 = 0.$$

Factoritzant el polinomi:

$$(a-b)^2(3a^2 + 8ba + 3b^2) = 0$$

Aleshores, $a = b$.

(Notem que $3a^2 + 8ba + 3b^2 \neq 0$).

A partir l'expressió (1):

$$c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{a^2 + a^2}{2} = a^2.$$

Aleshores, $a = c$.

Per tant el triangle $\triangle ABC$ és equilàter.

