

1.- La línia mitjana d'un trapezi isòsceles mesura a i les diagonals són perpendiculars.
 Calculeu la seua àrea.
 Gúsiev 250

Solució:

Siga ABCD un trapezi isòsceles de costats paral·lels $x = \overline{AB}$, $y = \overline{DC}$.

Siga O la intersecció de les seues diagonals.
 $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$.

Siga $h = \overline{DH}$ altura del trapezi.

Els triangles $\triangle ABO$, $\triangle CDO$ són rectangles i isòsceles.

L'altura h_1 del triangle $\triangle ABO$ sobre el costat

$$\overline{AB} \text{ és: } h_1 = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{x}{2}.$$

L'altura h_2 del triangle $\triangle CDO$ sobre el costat \overline{CD} és: $h_2 = \frac{\overline{CD}}{2} = \frac{y}{2}$.

Aleshores l'altura del trapezi és:

$$h = h_1 + h_2 = \frac{1}{2}(x + y).$$

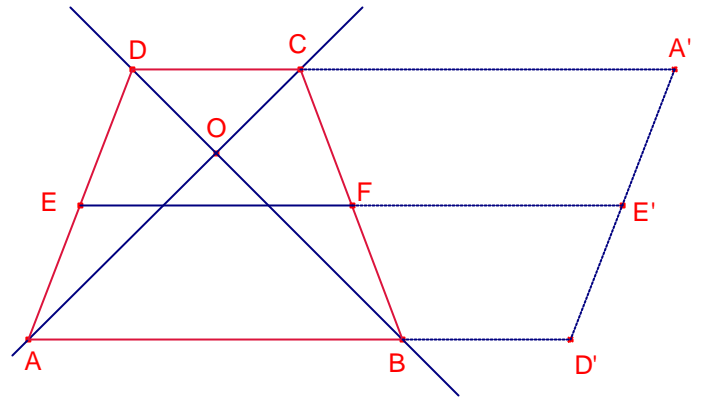
Siga $a = \overline{EF}$ la paral·lela mitjana.

Aleshores, $x + y = 2a$. Si construïm el trapezi simètric de l'inicial respecte del punt F:

$$\overline{EE'} = x + y = 2a.$$

L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} h = \frac{x + y}{2} \frac{x + y}{2} = a^2.$$



2.- Determineu l'àrea del paral·lelogram si els seus costats són a , b $a > b$ i l'angle que formen les seues diagonals és α .

Gúsiev 261.

Solució:

Siga O la intersecció de les diagonals.

Siga $\alpha = \angle AOD$, angle de les diagonals.

La intersecció de les diagonals d'un paral·lelogram divideixen la diagonal en dos parts iguals.

Siga $x = \overline{AO} = \overline{CO}$, $y = \overline{BO} = \overline{DO}$.

L'àrea del paral·lelogram $ABCD$ és:

$$S = 2 \cdot S_{AOD} + 2 \cdot S_{AOB} = 2 \frac{xy \cdot \sin \alpha}{2} + 2 \frac{xy \cdot \sin(180^\circ - \alpha)}{2} = 2xy \cdot \sin \alpha.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle AOD :

$$b^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos \alpha.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle AOB :

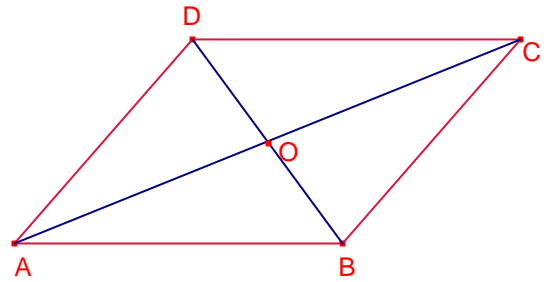
$$a^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cdot \cos \alpha.$$

Restant ambdues expressions:

$$a^2 - b^2 = 4xy \cdot \cos \alpha.$$

$$xy = \frac{a^2 - b^2}{4 \cos \alpha}.$$

$$S = 2xy \cdot \sin \alpha = 2 \frac{a^2 - b^2}{4 \cos \alpha} \sin \alpha = \frac{a^2 - b^2}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$



3.- Calculeu l'àrea d'un trapezi amb un angle agut α en la base si sabem que una de les bases del trapezi és el diàmetre de la circumferència de radi R circumscrita la trapezi.
 Gúsiev 262.

Solució:

Siga el trapezi $ABCD$ inscrit en una circumferència de radi R .

Siga $\overline{AB} = 2R$, $\alpha = \angle DAB$

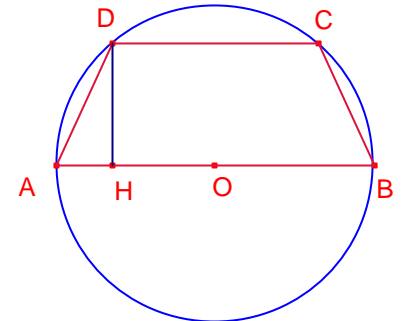
Per ser els costats \overline{AB} , \overline{CD} paral·lels:

$\angle CAB = \angle DCA$. Aleshores els arcs $\widehat{AD} = \widehat{BC}$.
 Aleshores el trapezi és isòsceles.

Siga DH altura del trapezi.

La superfície del trapezi és:

$$S = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \overline{DH}.$$



Per ser angle inscrit en la circumferència i abraçar mitja circumferència:

$$\angle ADB = 90^\circ.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle ADB$:

$$\overline{AD} = 2R \cdot \cos \alpha.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle AHD$:

$$\overline{DH} = \overline{AD} \cdot \sin \alpha = 2R \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2R \cdot \sin 2\alpha.$$

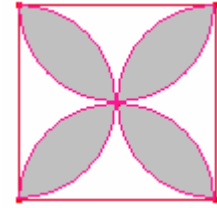
$$\overline{AH} = \overline{AD} \cdot \cos \alpha = 2R \cdot \cos^2 \alpha.$$

$$\overline{CD} = \overline{AB} - 2 \cdot \overline{AH} = 2R - 4R \cos^2 \alpha = 2R(1 - 2\cos^2 \alpha).$$

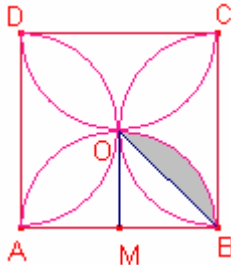
$$S = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \overline{DH} = \frac{2R + 2R(1 - 2\cos^2 \alpha)}{2} R \sin 2\alpha = 2R^2 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha.$$

4.- La figura està formada per un quadrat i 4 semicircumferències que passen per dos vèrtexs consecutius i pel centre del quadrat. Calculeu la proporció entre l'àrea de la zona ombrejada i l'àrea del quadrat.

G 285



Solució:



Considerem el quadrat ABCD de centre O.

Siga $a = \overline{AB}$ la longitud del costat.

Siga M el punt mig del costat \overline{AB} .

El radi de la semicircumferència que passa per A, O, B té centre M i el seu radi és $\frac{a}{2}$.

Mig pètal és igual a l'àrea d'un quart de cercle de radi $\frac{a}{2}$ menys l'àrea del triangle

$\triangle OMB$.

$$S_{1/4\text{pètal}} = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{\frac{a}{2}\frac{a}{2}}{2} = \frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2(\pi - 2).$$

L'àrea de la flor és 8 vegades l'anterior:

$$S_{\text{flor}} = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2(\pi - 2).$$

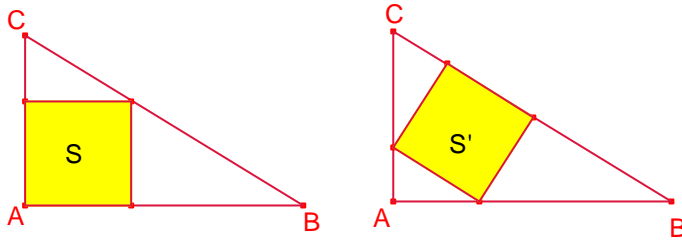
L'àrea del quadrat és:

$$S_{\text{ABCD}} = a^2.$$

La proporció d'àrea entre les dues figures és:

$$\frac{\frac{1}{2}a^2(\pi - 2)}{a^2} = \frac{\pi - 2}{2}.$$

5.- Volem inscriure en un mateix triangle rectangle $\triangle ABC$ un quadrat S d'àrea 441 i un quadrat S' d'àrea 440 (veure figura). Calculeu les mides dels costats del triangle $\triangle ABC$



Xtec abril 2008

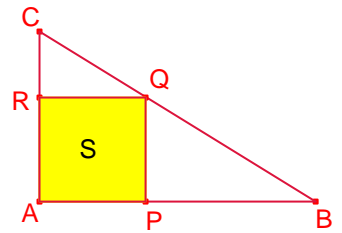
Solució:

Siga l'àrea del quadrat $APQR$ 441, aleshores, $\overline{AP} = \overline{PQ} = \sqrt{441} = 21$.

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle PBQ$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{b}{c} = \frac{21}{c-21}, \text{ aleshores:}$$

$$bc = 21(b+c) \quad (1)$$



Siga l'àrea del quadrat $KLMN$ 440, aleshores, $\overline{KN} = \overline{KL} = \sqrt{440}$.

Siga $m = \overline{AN}$, $n = \overline{AK}$.

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle AKN$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{n}{m} = \frac{c}{b}, \text{ aleshores, } n = \frac{c}{b}m \quad (2)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle AKN$:

$$m^2 + n^2 = 440 \quad (3)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (3):

$$m^2 + \left(\frac{c}{b}m\right)^2 = 440. \text{ Aplicant el teorema de Pitàgores i simplificant:}$$

$$m = \frac{b}{a}\sqrt{440} \quad (4)$$

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle LBK$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\sqrt{440}}{c-n} = \frac{b}{a} \quad (5)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (5):

$$\frac{\sqrt{440}}{c - \frac{c}{b}m} = \frac{b}{a}. \text{ Aïllant } m:$$

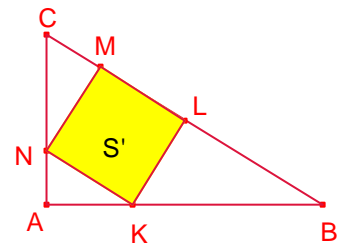
$$m = b - \frac{a}{c}\sqrt{440} \quad (6)$$

Igualant les expressions (4) i (6)

$$\frac{b}{a}\sqrt{440} = b - \frac{a}{c}\sqrt{440}. \text{ Simplificant.}$$

$abc - a^2\sqrt{440} = bc\sqrt{440}$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle ABC$:

$$\sqrt{b^2 + c^2} \cdot bc - (b^2 + c^2)\sqrt{440} = bc\sqrt{440} \quad (7)$$



Considerem el sistema format per les expressions (1) (7)

$$\begin{cases} bc = 21(b + c) \\ \sqrt{b^2 + c^2} \cdot bc - (b^2 + c^2)\sqrt{440} = bc\sqrt{440} \end{cases}$$

La solució del problema és la solució d'aquest sistema.

Resolem-lo:

Siga $d = b + c$.

$$d^2 = b^2 + c^2 + 2bc.$$

Substituint l'expressió (1)

$$b^2 + c^2 = d^2 - 42d \quad (8)$$

Substituint les expressions (1) (8) en l'expressió (7):

$$\sqrt{d^2 - 42d} \cdot 21d - (d^2 - 42d)\sqrt{440} = 21d\sqrt{440}.$$

Simplificant:

$$21\sqrt{d^2 - 42d} = (d - 21)\sqrt{440}.$$

Elevant al quadrat i simplificant:

$$d^2 - 42d - 194040 = 0. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$d = 462 \quad (9)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (9):

$$\begin{cases} bc = 21(b + c) \\ b + c = 462 \end{cases}. \text{ Les solucions del sistema són:}$$

$$\begin{cases} b = 231 + 63\sqrt{11} \\ c = 231 - 63\sqrt{11} \end{cases}, \begin{cases} c = 231 + 63\sqrt{11} \\ b = 231 - 63\sqrt{11} \end{cases}.$$

En tots dos casos, aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle ABC$:

$$a = 42\sqrt{110}.$$

6.- Siga una circumferència inscrita en un quadrat ABCD tangent al costat \overline{AD} en el punt M. siguen F, E dos punts que pertanyen als segments \overline{AM} i \overline{MD} , respectivament, equidistants de M. Demostreu que si el segment \overline{BE} és paral·lel a la tangent a la circumferència traçada per F i distinta de FM, aleshores, F és el punt mig del segment \overline{AM} .

Gaceta Matemática 98.

Solució.

Siga O el centre del quadrat ABCD.

Siga $\overline{AD} = 2$ costat del quadrat.

Siga $a = \overline{AF} = \overline{DE}$.

Siga $\alpha = \angle AEB$. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{2-a}$.

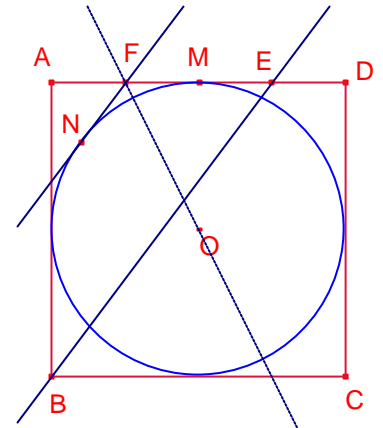
Siga N el punt de tangència de la recta tangent a la circumferència que passa per F.

$\overline{FM} = \overline{FN} = 1-a$.

La bisectriu de l'angle $\angle MFN$. Passa pel centre del quadrat.

Siga $\beta = \angle DFO$.

Per a que la recta FN siga paral·lela a la recta BE, $\alpha = 180^\circ - 2\beta$.



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{OM}}{\overline{FM}} = \frac{1}{1-a}$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{2 \frac{1}{1-a}}{1 - \left(\frac{1}{1-a}\right)^2} = \frac{2(1-a)}{a^2 - 2a}$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - 2\beta) = -\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$$

Si $\alpha = 180^\circ - 2\beta$ aleshores $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(180^\circ - 2\beta)$.

$$\frac{2}{2-a} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$$

Simplificant, $a = \frac{1}{2}$, és a dir F és el punt mig de \overline{AM} .

7.- En un quadrilàter ABCD coneguem $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $\overline{AB} = \sqrt{3}$, $\overline{CD} = 2\sqrt{3}$, $\overline{BC} = 3$.
Determineu els angles i l'altre costat del quadrilàter.
Gúsiev 107.

Solució:

Considerem les rectes AB, CD que s'intersecten en el punt E.

El triangle $\triangle AED$ és equilàter ja que $\angle A = \angle D = 60^\circ$.

Siga $x = \overline{BE}$, aleshores, $\overline{AE} = \overline{DE} = x + \sqrt{3}$.

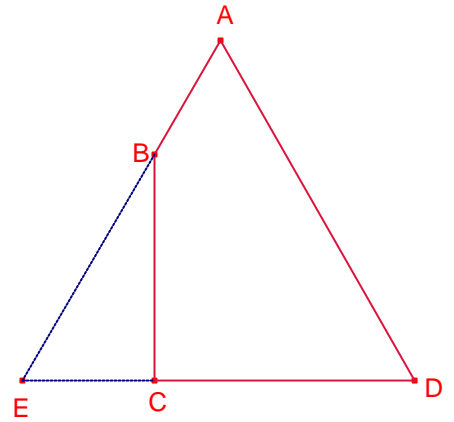
Per tant, $\overline{EC} = x - \sqrt{3}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ECB$:

$$3^2 = x^2 + (x - \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 3(x - \sqrt{3})\cos 60^\circ.$$

Resolent l'equació: $x = 2\sqrt{3}$.

Aleshores, $\overline{AD} = \sqrt{3} + x = 3\sqrt{3}$



Notem que el triangle $\triangle ECB$, ja que $\overline{BE}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{BC}^2$, $(2\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3})^2 + 3^2$.

Aleshores, $\angle ECB = 90^\circ$.

Per tant, $C = 90^\circ$, $B = 360^\circ - (A + C + D) = 150^\circ$.

8.- En un rectangle ABCD la base \overline{AD} està dividida pels punts M, P en tres parts iguals. Demostreu que la suma dels angles $\angle AMB$, $\angle APB$ i $\angle ADB$ és igual a 90° si sabem que $\overline{AD} = 3 \cdot \overline{AB}$.
Gúsiev 70.

Solució:

$\overline{AM} = \overline{AB}$, aleshores, $\angle AMB = 45^\circ$.

Siga $\alpha = \angle APB$ i $\beta = \angle ADB$.

$\overline{AP} = 2 \cdot \overline{AB}$, $\overline{AD} = 3 \cdot \overline{AB}$.

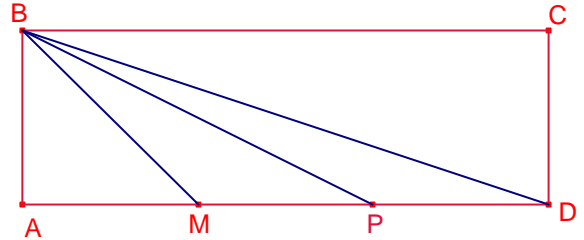
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}.$$

$$0^\circ \leq \alpha + \beta \leq 180^\circ$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1.$$

$$\alpha + \beta = \operatorname{arctg}(1) = 45^\circ.$$

$$\angle AMB + \angle APB + \angle ADB = 45^\circ + \alpha + \beta = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ.$$



9.- Un triangle $\triangle ABC$ és equilàter si i només si $(a+b+c)\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right) = 9$.

Francisco Bellot. Triángulos especiales 1.

Solució:

(\Rightarrow)

Si $\triangle ABC$ és equilàter, $a = b = c$, $(a+b+c)\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right) = 3a\left(\frac{3}{a}\right) = 9$.

(\Leftarrow)

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right) = 9 \Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{a^2}{abc} + \frac{b^2}{abc} + \frac{c^2}{abc}\right) = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) = 9abc .$$

Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica de 3 nombres positius:

$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ i la igualtat s'assoleix quan $a = b = c$.

$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ i la igualtat s'assoleix quan $a^2 = b^2 = c^2$, és a dir, quan $a = b = c$.

Multiplicant les dues desigualtats:

$(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3\sqrt[3]{abc} 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 9abc$ i la igualtat s'assoleix quan $a = b = c$, és a dir quan el triangle és equilàter.

10.- Siga el triangle $\triangle ABC$ d'àrea K . Per a cada punt P del segment \overline{AB} , més pròxim del punt A que del punt B , considerem els punts Q del segment \overline{AC} , R de \overline{BC} i S de \overline{AB} tal que $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$, $\overline{QR} \parallel \overline{AB}$, $\overline{RS} \parallel \overline{AC}$. Determineu el valor màxim de l'àrea del quadrilàter $PQRS$.

Solució:

Notem que per poder construir-se el quadrilàter $PQRS$ convex el punt P ha d'estar entre A i el punt mig del costat \overline{AB} .

Si dos triangles són semblants les àrees són proporcionals al quadrat de la raó de semblança.

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle APQ$ són semblants. Siga r la raó de semblança.

$$\frac{\overline{PQ}}{a} = \frac{\overline{AQ}}{b} = r. \text{ Aleshores, } \overline{CQ} = b - \overline{AQ} = b - rb = (1-r)b.$$

$$\frac{S_{APQ}}{S_{ABC}} = r^2, \text{ aleshores, } S_{APQ} = r^2 K.$$

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle CQR$ són semblants la raó de semblança és:

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{AC}} = \frac{(1-r)b}{b} = 1-r. \quad \frac{\overline{CR}}{\overline{BC}} = (1-r). \text{ Aleshores, } \overline{BR} = a - \overline{CR} = ra.$$

$$\frac{S_{CQR}}{S_{ABC}} = (1-r)^2, \text{ aleshores, } S_{CQR} = (1-r)^2 K.$$

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle BRS$ són semblants la raó de semblança és:

$$\frac{\overline{BR}}{\overline{BC}} = \frac{ra}{a} = r.$$

$$\frac{S_{BRS}}{S_{ABC}} = r^2, \text{ aleshores, } S_{BRS} = r^2 K.$$

Calculem la superfície del quadrilàter $PQRS$:

$$S_{PQRS} = S_{ABC} - (S_{APQ} + S_{CQR} + S_{BRS}) = K - (r^2 K + (1-r)^2 K + r^2 K) = (-3r^2 + 2r)K.$$

Considerem la funció $f(r) = -3r^2 + 2r$ que és una paràbola convexa, el seu màxim

s'assoleix en el vèrtex, és a dir, quan $r = \frac{-2}{2(-3)} = \frac{1}{3}$.

Aleshores l'àrea màxima del quadrilàter $PQRS$ s'assoleix quan la raó de

proporcionalitat dels triangles $\triangle ABC$, $\triangle APQ$ és $r = \frac{1}{3}$, i l'àrea màxima és:

$$S_{PQRS\text{màx}} = \left(-3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\frac{1}{3} \right) K = \frac{1}{3} K.$$

