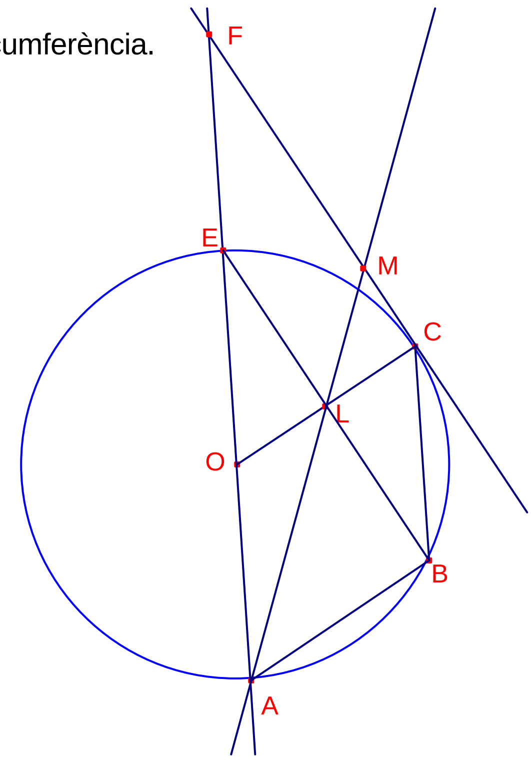
Problemes geometria 21

1.- Siga C un punt sobre la circumferència de centre O i radi r. Siga $\overline{AB}$ una corda de longitud r paral·lela a $\overline{OC}$. La recta AO talla la circumferència en E i talla la tangent a la circumferència per C en el punt F. La corda $\overline{BE}$ talla el segment $\overline{OC}$ en el punt L, i la recta AL talla $\overline{CF}$ en M. Determineu la raó $\overline{CF}:\overline{CM}$.
Crux Mathematicorum M351.

Solució:



Si $\overline{OC}$ és paral·lel a $\overline{AB}$ i a més a més $\overline{OC}=\overline{OA}=\overline{AB}=\overline{OB}=r$, OABC és un rombe tal que $\angle OAB=60^o$, $\angle AOC=120^o$, $\angle FOC=60^o$

El triangle $\overset{\Delta}{OCF}$ és rectangle ja que $\overline{CF}$ és tangent a la circumferència.
Aleshores, per ser $\angle FOC=60^o$, $\overline{OF}=2r$, $\overline{CF}=r\sqrt{3}$

$\overline{OL}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$, aleshores:
$\overline{OL}=\frac{r}{2}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{OAL}$:
$\overline{AL}^2=r^2+\frac{r^2}{4}-2\cdot r\cdot\frac{r}{2}\cdot\cos 120^o$.
$\overline{AL}=r\frac{\sqrt{7}}{2}$.
Siga $\alpha=\angle OLA$.
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{OLA}$:
$\frac{r}{\sin\alpha}=\frac{r\frac{\sqrt{7}}{2}}{\sin 120^o}$, aleshores, $\sin\alpha=\sqrt{\frac{3}{7}}$.
Per tant, $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LCM}$:
$\overline{CM}=\frac{r}{2}\mathrm{tg}\,\alpha=r\frac{\sqrt{3}}{4}$.

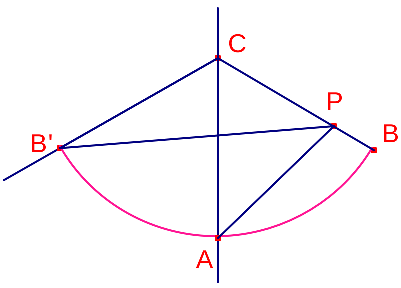
$\frac{\overline{CM}}{\overline{CF}}=\frac{r\frac{\sqrt{3}}{4}}{r\sqrt{3}}=\frac{1}{4}$.
Per tant,
$\overline{CF}:\overline{CM}=4:1$.

2.- Siga un con de revolució de vèrtex C i una base de radi 8 i apotema 24.
Siga A, B dos punts de la circumferència base situats sobre un diàmetre, i P un punt sobre el segment $\overline{CB}$.
a) Si $\overline{CP} = 18$, determineu el camí més curt sobre el con partint de A i passant per P i finalitzant en A.
b) Trobeu la posició de P sobre $\overline{CB}$ que minimitza la longitud més curta del camí mencionat en a).
Crux Mathematicorum M355

Solució:

a)
Si tallem el con (sense la base) des de B fins a C i despleguem la figura, ens quedaria un sector circular de radi 24 i l'arc mesuraria la longitud de circumferència de radi 8 (radi de la circumferència de la base del con).

Per ser AB diàmetre el punt A es troba en la meitat de l'arc.



L'arc de circumferència BB' mesura $2\pi 8 = 16\pi$.

L'angle $\angle BCB' = \frac{16\pi}{24} = \frac{2\pi}{3}$.

$\angle BCA = \frac{\angle BCB'}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{APC}$:

$$\overline{AP}^2 = 24^2 + 18^2 - 2 \cdot 24 \cdot 18 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 468$$

$$\overline{AP} = 6\sqrt{13}$$

El camí més curt és $2 \cdot \overline{AP} = 12\sqrt{13}$.

b)
Siga $x = \overline{CP}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{APC}$:

$$\overline{AP}^2 = 24^2 + x^2 - 2 \cdot 24 \cdot x \cdot \cos\frac{\pi}{3} = x^2 - 24x + 24^2$$

Considerem la funció $f(x) = x^2 - 24x + 24^2$ que és una paràbola còncava. El mínim de la funció s'assoleix en el vèrtex.

El vèrtex es troba en $x = \frac{24}{2} = 12$.

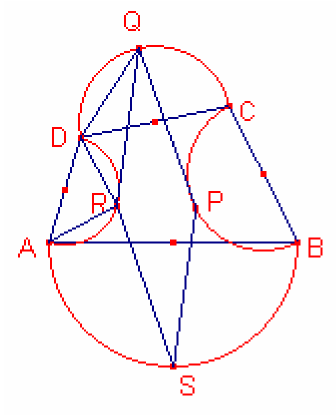
El valor mínim de $\overline{AP}$ és el valor mínim de $\overline{AP}^2$, s'assoleix quan $\overline{CP} = 12$
La distància mínima entre A i P és:

$$\overline{AP} = \sqrt{12^2 - 24 \cdot 12 + 24^2} = 12\sqrt{3}$$

El camí més curt mesura $2 \cdot \overline{AP} = 24\sqrt{3}$.

3.- En els costats d'un quadrilàter, com a diàmetres s'han construït semicircumferències, amb la particularitat que dues semicircumferències oposades estan dirigides a l'interior del quadrilàter i les altres dues, a l'exterior. Demostreu que els punts mig de les circumferències formen un paral·lelogram.
Gúsiev 522

Solució:



$\angle ADC = \angle QDR$. $\overline{DR} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AD}$, $\overline{DQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{DC}$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ADC}$, $\overset{\Delta}{RDQ}$ són semblants i de raó $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Aplicant el teorema de Tales: $\overline{RQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AC}$.

$\angle ABC = \angle SBP$. $\overline{BP} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{BC}$, $\overline{BS} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AB}$.

Aleshores, els triangles $\overset{?}{CAB}$, $\overset{?}{PBS}$ són semblants i de raó $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

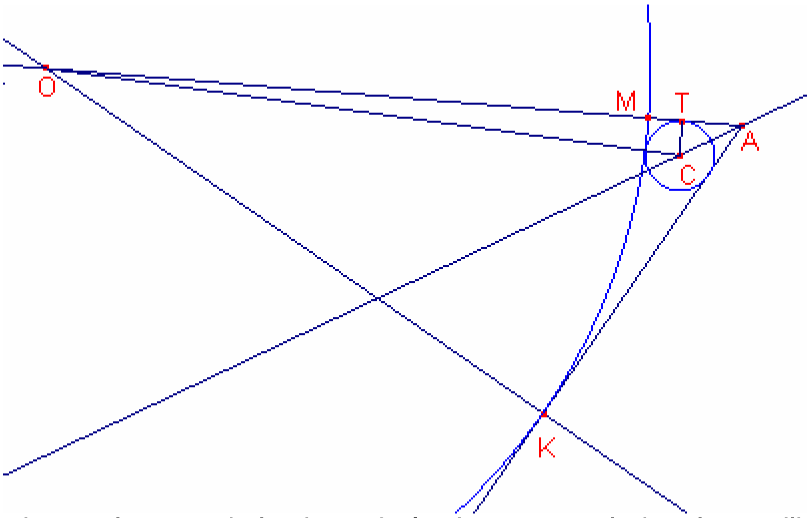
Aplicant el teorema de Tales: $\overline{PS} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AC}$.

Aleshores, $\overline{RQ} = \overline{PS}$.

Anàlogament, $\overline{PQ} = \overline{RS}$.

4.- Des del punt A exterior a la circumferència de centre O i radi 2cm s'ha traçat la tangent AK. El segment $\overline{OA}$ s'intersecta amb la circumferència en el punt M i forma amb la tangent un angle de 60º. Determineu el radi de la circumferència inscrita en el triangle curvilini MKA.
Gusiev 207

Solució:



Siga C el centre de la circumferència tangent al triangle curvilini MKA.
Siga T el punt de tangència de la circumferència amb el segment $\overline{AM}$.
Siga $r = \overline{CT}$ el radi de la circumferència.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKA}$:

$$\overline{OA} = \frac{2}{\sin 60^o} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Notem que $\angle CAM = 30^o$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATC}$:

$$\overline{AC} = \frac{r}{\sin 30^o} = 2r .$$

$$\overline{OC} = 2 + r .$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{OCA}$:

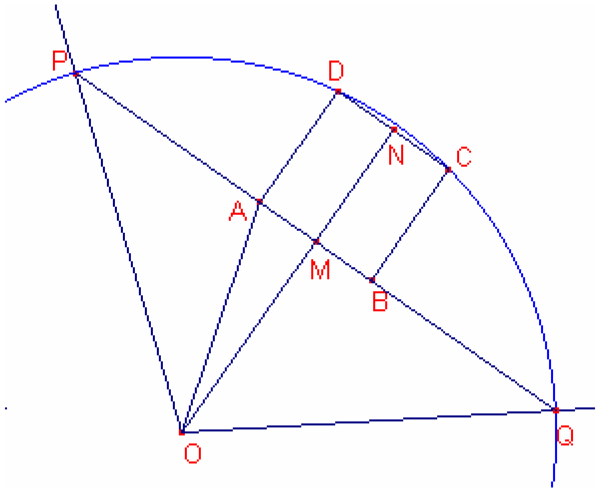
$(2+r)^2 = (2r)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2r \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 30^o$. Simplificant:

$9r^2 - 36r + 4 = 0$. Resolent l'equació:

$$r = \frac{6-\sqrt{32}}{3}.$$

5.- L'arc d'una circumferència de radi R està comprés en l'angle central $2\alpha, \left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

La corda que comprén l'arc divideix el cercle en dos segments. En el menor s'ha inscrit un quadrat. Determineu el costat del quadrat.
Gúsiev 199.



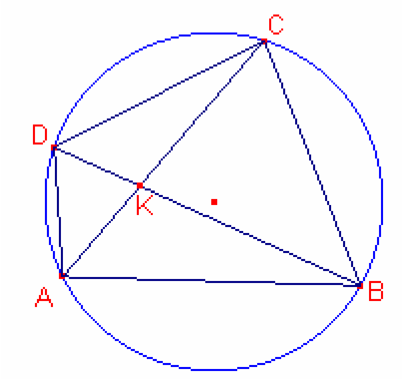
Solució:
Siga l'arc central $\angle POQ = 2\alpha$.
Siga ABCD el quadrat que cerquem. Siga $\overline{AB} = 2x$ el costat del quadrat.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$ i N el punt mig del costat $\overline{CD}$.
$\overline{AM} = x$.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMP}$:
$\overline{OM} = R \cdot \cos\alpha$.
$\overline{ON} = \overline{OM} + \overline{MN} = R \cdot \cos\alpha + 2x$ (1)
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OND}$:
$\overline{ON} = \sqrt{R^2 - x^2}$ (2)
Igualant les expressions (1) i (2):
$R \cdot \cos\alpha + 2x = \sqrt{R^2 - x^2}$. Resolent l'equació en la incògnita x:

$$x = \frac{-2\cos\alpha + \sqrt{5 - \cos^2\alpha}}{5}.$$

Aleshores el costat del quadrat mesura:

$$\overline{AB} = 2x = \frac{-4\cos\alpha + 2\sqrt{5 - \cos^2\alpha}}{5}.$$

6.- Siga el quadrilàter inscriptible en una circumferència ABCD tal que les seues diagonals es tallen en el punt K si $a=\overline{AB}$, $b=\overline{BK}$, $c=\overline{AK}$ i $d=\overline{CD}$, calculeu $\overline{AC}$.
Shariguin I80.



Solució:
Aplicant la potència del punt K respecte de la circumferència:
Siga $x=\overline{CK}$, $y=\overline{DK}$.

$by=cx$, aleshores, $y=\frac{c}{b}x$.

Siga $\alpha=\angle AKB=\angle CKD$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABK}$:

$$\cos\alpha=\frac{a^2-b^2-c^2}{-2bc}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CKD}$:

$$d^2=x^2+\left(\frac{c}{b}x\right)^2-2x\left(\frac{c}{b}x\right)\left(\frac{a^2-b^2-c^2}{-2bc}\right).$$

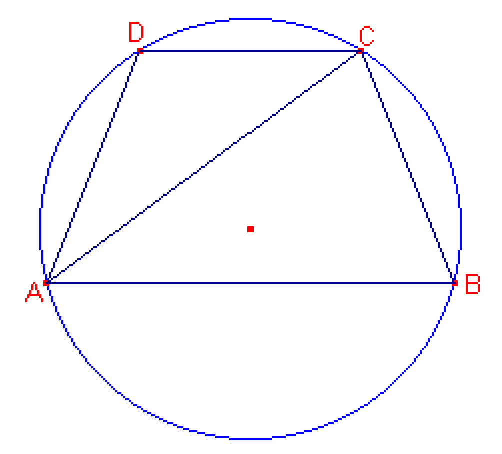
$$d^2=x^2+\left(1+\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2-b^2-c^2}{b^2}\right).$$ Resolent l'equació en x:

$$x=\frac{bd}{a}.$$

$$\overline{AC}=\overline{AK}+\overline{CK}=c+\frac{bd}{a}.$$

7.- Un trapezi està inscrit en una circumferència. La base del trapezi forma un angle α amb el costat i un angle β amb la diagonal. Calculeu la proporció entre l'àrea del cercle i l'àrea del trapezi.
Shariguin I81

Solució:
Siga R el radi de la circumferència.
Siga $\alpha = \angle DAB$, $\beta = \angle CAB = \angle ACD$.



Aplicant el teorema del sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\alpha} = 2R .$$

L'àrea del cercle és:

$$S_{cercle} = \pi R^2 = \pi \frac{\overline{AC}^2}{4\sin^2\alpha} .$$

$$S_{ABC} = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cdot\sin\beta}{2} .$$

$$S_{ACD} = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{CD}\cdot\sin\beta}{2}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\overline{AC}}{\sin\alpha} \text{, aleshores, } \overline{AB} = \frac{\overline{AC}\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} .$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$:

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\overline{AC}}{\sin\alpha} \text{, aleshores, } \overline{CD} = \frac{\overline{AC}\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha} .$$

$$S_{ABC} = \frac{\overline{AC}^2\cdot\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}, \quad S_{ACD} = \frac{\overline{AC}^2\cdot\sin\beta\cdot\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\alpha} .$$

La superfície del trapezi ABCD és:

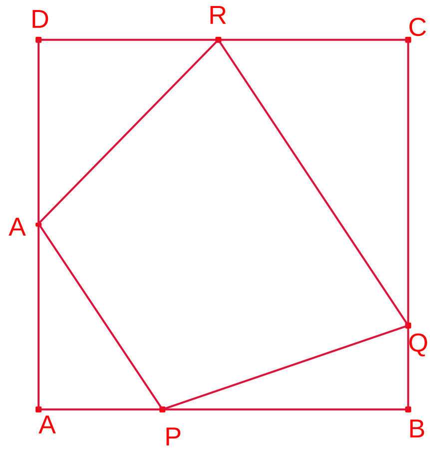
$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{\sin\beta}{2\sin\alpha}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))\overline{AC}^2 .$$

Calculem la proporció entre l'àrea del cercle i l'àrea del trapezi.

$$\frac{S_{cercle}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{\pi}{4\sin^2\alpha}\overline{AC}^2}{\frac{\sin\beta}{2\sin\alpha}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))\overline{AC}^2} = \pi\frac{1}{2\sin\alpha\sin\beta(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))} =$$

$$= \pi\frac{1}{2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta} = \pi\frac{1}{2\sin^2\alpha\cdot\sin 2\beta} .$$

8.- El costat d'un quadrat ABCD és a. En els costats $\overline{AD}, \overline{AB}$ estan agafats els punts K, P, respectivament, tal que $\overline{AK} : \overline{AD} = 1:2$, $\overline{AP} : \overline{AB} = 1:3$. En el quadrat està inscrit un trapezi de base $\overline{PK}$. Determineu l'àrea màxima del trapezi.
Gúsiev 561.



Solució:
Siga el trapezi PQRK tal que $\overline{PK}$ és paral·lel a $\overline{QR}$, Q i R pertanyen als costats $\overline{BC}, \overline{CD}$, respectivament.

$\overline{AK} = \frac{a}{2}$, $\overline{AP} = \frac{a}{3}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{APK}$, $\overset{\Delta}{CQR}$ són semblants.

Siga $\overline{CQ} = 3x$, $\overline{CR} = 2x$.

$$S_{PGRK} = S_{ABCD} - (S_{APK} + S_{PBQ} + S_{QCR} + S_{RDK}).$$

$$S_{PGRK} = a^2 - \left(\frac{a^2}{12} + \frac{a(a-3x)}{3} + 3x^2 + \frac{a(a-2x)}{4}\right).$$

$$S_{PGRK} = -3x^2 + \frac{3a}{2}x + \frac{a^2}{3}.$$

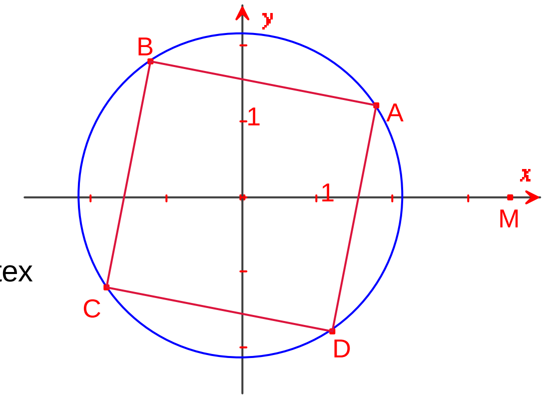
Considerem la funció $f(x) = -3x^2 + \frac{3a}{2}x + \frac{a^2}{3}$ que és una paràbola convexa. El màxim s'assoleix en el vèrtex.

El vèrtex és $x = \frac{a}{4}$.

La superfície màxima del trapezi és:

$$S_{màx} = f\left(\frac{a}{4}\right) = -3\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \frac{3a}{2}\frac{a}{4} + \frac{a^2}{3} = \frac{25a^2}{48}.$$

9.- Demostreu que la suma de les quartes potències de les distàncies d'un punt donat, situat en el plànol de qualsevol circumferència, fins els vèrtexs de tot quadrat inscrit en ella és constant.
Gúsiev 534.



Solució:
Considerem la circumferència de centre $O(0,0)$ i radi R.
Siga un punt fix $M(c,0)$.

Siga $A(a,b)$ un punt variable de la circumferència,
$a^2+b^2=R^2$.
Considerem el quadrat ABCD. Les coordenades dels vèrtex són:
$B(-b,a)$, $C(-a,-b)$, $D(b-a)$.

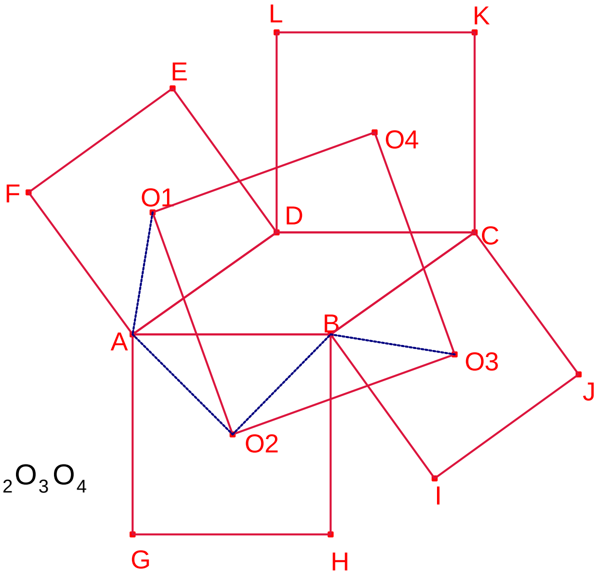
$\overline{AM}^2=(c-a)^2+b^2=c^2-2ac+R^2$.
$\overline{BM}^2=(c+b)^2+a^2=c^2+2bc+R^2$.
$\overline{CM}^2=(c+a)^2+b^2=c^2+2ac+R^2$
$\overline{DM}^2=(c-b)^2+a^2=c^2-2bc+R^2$.

$\overline{AM}^4=c^4+4a^2c^2+R^4-4ac^3-4acR^2+2c^2R^2$.
$\overline{BM}^4=c^4+4b^2c^2+R^4+4bc^3+4bcR^2+2c^2R^2$.
$\overline{CM}^4=c^4+4a^2c^2+R^4+4ac^3+4acR^2+2c^2R^2$.
$\overline{DM}^4=c^4+4b^2c^2+R^4-4bc^3-4bcR^2+2c^2R^2$.

$$\overline{AM}^4+\overline{BM}^4+\overline{CM}^4+\overline{DM}^2=4c^4+4R^4+4c^2(2a^2+2b^2)+8c^2R^2=$$
$$=4c^4+4R^4+8c^2R^2+8c^2R^2=$$
$$=4c^4+4R^4+16c^2R^2.$$
La suma no depén del punt A.

10.- Al defora d'un paral·lelogram s'han construït en els seus costats quadrats. Demostreu que els centres d'aquests quadrats formen un quadrat.
Gúsiev 458

Solució:
Siga el paral·lelogram ABCD i els quadrats exteriors ADEF, ABHG, BCJI, CDLK de centres O_1, O_2, O_3, O_4, respectivament.



Siga $\alpha = \angle BAD$, $a = \overline{AB}$, $b = \overline{AD}$.

$\overline{AO_1} = \overline{BO_3} = \frac{\sqrt{2}}{2} b$, $\overline{AO_2} = \overline{BO_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$.

$\angle O_1AO_2 = 90 + \alpha$,. $\angle O_2BO_3 = 90 + \alpha$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{O_1AO_2}$, $\overset{\Delta}{O_3BO_2}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{O_1O_2} = \overline{O_2O_3}$.

$\angle AO_2O_1 = \angle BO_2O_3$, $\angle AO_2B = 90^o$

Aleshores, $\angle O_1O_2O_3 = 90^o$.

Aleshores, amb els altres angles provaríem que $O_1O_2O_3O_4$ és un quadrat.