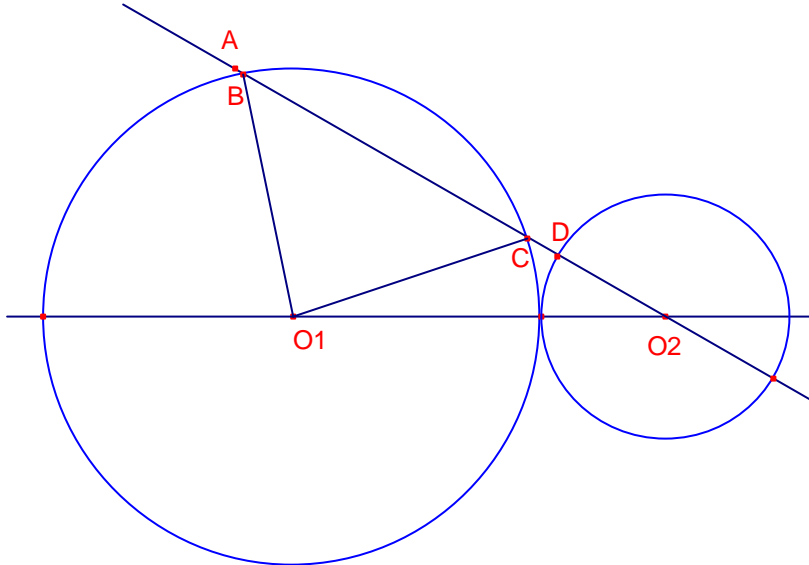


Problemes de Geometria 22

1.- Dues circumferències de radi R i $\frac{R}{2}$ són tangents exteriors. Un segment de longitud $2R$ té un extrem en el centre de la circumferència menuda i forma un angle de 30° amb la recta que formen els centres. Determineu la part del segment que queda fora de les circumferències (el segment talla les dues circumferències).
Shariguin 186

Solució:



Siga $\overline{O_1O_2} = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R$, $\overline{O_2A} = 2R$.

Siguen B i C els punt de tall del segment $\overline{O_2A}$ i la circumferència gran.

Siga $x = \overline{O_2B}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $O_1\hat{O}_2B$:

$$R^2 = x^2 + \frac{9}{4}R^2 - 2x \frac{3}{2}R \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$x^2 - x \frac{3\sqrt{3}}{2}R + \frac{5}{4}R^2 = 0$. Resolent l'equació en la incògnita x :

$$x = \overline{O_2B} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}R + \sqrt{\frac{27}{4}R^2 - 5R^2}}{2} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{4}R.$$

$$x = \overline{O_2C} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}R - \sqrt{\frac{27}{4}R^2 - 5R^2}}{2} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{4}R.$$

Aleshores, $\overline{BC} = \overline{O_2B} - \overline{O_2C} = \frac{\sqrt{7}}{2}R$.

La part del segment que queda fora de les circumferències és:

$$\overline{O_2A} - (\overline{BC} + \overline{O_2D}) = 2R - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}R + \frac{1}{2}R \right) = \frac{3 - \sqrt{7}}{2}R.$$

2.- En un triangle $\triangle ABC$, $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{AC} = 7$, i a més a més, les bisectrius \overline{AD} i \overline{CE} es tallen en P. Calculeu \overline{AP} .
Concurs Puig Adam XXIV.

Solució:

Utilitzant el teorema del cosinus calculem els angles del triangle $\triangle ABC$:

$$\cos A = \frac{-5^2 + 3^2 + 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{11}{14}. \quad \cos B = \frac{-7^2 + 3^2 + 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{-1}{2}.$$

Aleshores, $B = 120^\circ$. Per tant, $\angle ABP = 60^\circ$.

Calculem el radi de la circumferència inscrita, utilitzant les fórmules de l'àrea:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4} = r \frac{a+b+c}{2}:$$

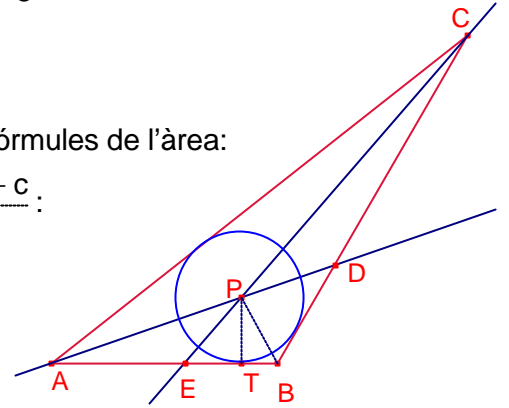
$$\frac{\sqrt{15 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 1}}{4} = \frac{15}{2} r. \quad \text{Aleshores, } r = \overline{PT} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle BTP$:

$$\overline{PB} = \frac{\overline{PT}}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABP$:

$$\overline{AP}^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}. \quad \text{Aleshores, } \overline{AP} = \sqrt{7}.$$



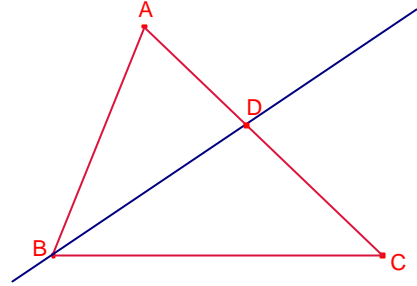
3.- En un triangle $\triangle ABC$, la bisectriu de l'angle B talla el costat \overline{AC} en el punt D.
Demostreu que la longitud del segment \overline{BD} és menor que la mitjana geomètrica dels costats \overline{BA} i \overline{BC} .

Concurs Puig Adam XXIV.

Solució:

La longitud de la bisectriu \overline{BD} del triangle és:

$$\overline{BD} = \frac{2ac \cdot \cos \frac{B}{2}}{a+c}.$$



Si a, c són positius aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:

$$\frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac} \text{ i la igualtat s'assoleix quan } a = c.$$

$$0 < \cos \frac{B}{2} < 1.$$

$$\overline{BD} = \frac{2ac \cdot \cos \frac{B}{2}}{a+c} = \frac{ac}{\frac{a+c}{2}} \cos \frac{B}{2} < \frac{ac}{\sqrt{ac}} \cdot 1 = \sqrt{ac}.$$

Aleshores, la longitud del segment \overline{BD} és menor que la mitjana geomètrica dels costats a, c.

4.- Resoleu un triangle rectangle coneguts els radis de les circumferències inscrita i circumscria.

Proposat per Carlos Benlloch, professor de dibuix.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$. Suposem $b \geq c$.

Siguen r i R els radis de les circumferències inscrita i

circumscria del triangle $\triangle ABC$, respectivament.

El radi de la circumferència circumscria d'un triangle rectangle és la meitat de la hipotenusa:

$$R = \frac{a}{2}.$$

El radi de la circumferència inscrita d'un triangle rectangle és:

$$r = p - a = \frac{-a + b + c}{2}.$$

$$\text{Aleshores, } R + r = \frac{b + c}{2} \quad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores: $b^2 + c^2 = a^2 = 4R^2$.

$$(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc.$$

$$(2R + 2r)^2 = 4R^2 + 2bc.$$

$$\text{Aleshores, } 2bc = (2R + 2r)^2 - 4R^2 \quad (2)$$

$$(b - c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc$$

$$(b - c)^2 = 4R^2 - 2bc \quad (3)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (3):

$$(b - c)^2 = 4R^2 - (2R + 2r)^2 + 4R^2.$$

$$(b - c)^2 = 4(R^2 - r^2 - 2Rr). \text{ Aleshores:}$$

$$b - c = 2\sqrt{R^2 - r^2 - 2Rr} \quad (4)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1), (4)

$$\begin{cases} b + c = 2R + 2r \\ b - c = 2\sqrt{R^2 - r^2 - 2Rr} \end{cases}. \text{ La solució del qual és: } \begin{cases} b = R + r + \sqrt{R^2 - r^2 - 2Rr} \\ c = R + r - \sqrt{R^2 - r^2 - 2Rr} \end{cases}.$$

El problema té solució si $R^2 - r^2 - 2Rr \geq 0$. És a dir, $\frac{r}{R} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Construcció:

a) Dibuixar el segment $\overline{BC} = 2R$. Dibuixar O el seu punt mig.

b) Dibuixar la recta s paral·lela al segment \overline{BC} a una distància r .

c) Dibuixar sobre \overline{BC} l'arc capaç de 135° .

d) La intersecció de l'arc capaç i la recta s dona I incentre del triangle $\triangle ABC$.

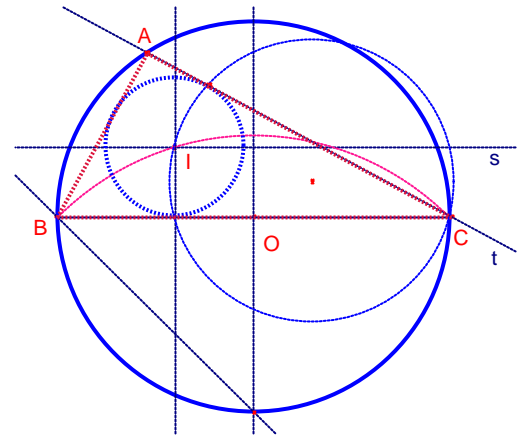
e) Dibuixar la circumferència de centre I tangent al segment \overline{BC} (circumferència inscrita).

f) Dibuixar la circumferència de centre O que passa per B (circumferència circumscria).

g) Dibuixar la recta t tangent a la circumferència inscrita que passa pel punt C .

h) La intersecció de la circumferència circumscria i la recta t és el punt A .

i) Dibuixar el triangle $\triangle ABC$.



5.- En un triangle rectangle isòsceles $\triangle ABC$, $C = 90^\circ$ s'obre la hipotenusa \overline{AB} s'agafen els punts K, M (K entre A i M) tal que $\angle KCM = 45^\circ$.

Proveu que $\overline{KM}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{BM}^2$.

Solució:

Per ser $\triangle ABC$, $C = 90^\circ$, isòsceles, siga $b = \overline{CA} = \overline{CB}$, $c = \overline{AB}$.

$A = B = 45^\circ$.

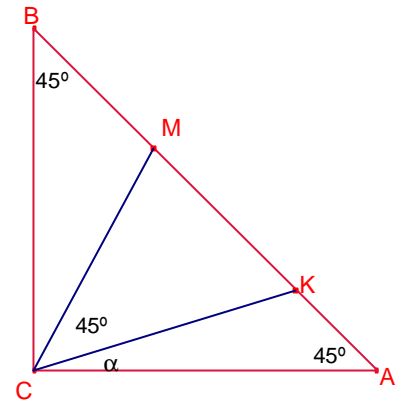
Siga $\alpha = \angle KCA$. Aleshores:

$\angle CKM = 45^\circ + \alpha$, $\angle CMK = 90^\circ - \alpha$.

Notem que els triangles $\triangle CMK$, $\triangle AMC$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{KM}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{CM}}{b}, \text{ aleshores, } \overline{CK} \cdot \overline{CM} = b \cdot \overline{KM} \quad (1)$$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle CAK$:

$$\overline{CK}^2 = \overline{AK}^2 + b^2 - 2b \cdot \overline{AK} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle CBM$:

$$\overline{CM}^2 = \overline{BM}^2 + b^2 - 2b \cdot \overline{BM} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

Sumant les expressions (2) (32):

$$\overline{AK}^2 + \overline{BM}^2 = -2b^2 + b\sqrt{2}(\overline{AK} + \overline{BM}) + \overline{CK}^2 + \overline{CM}^2 \quad (4)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle MCK$:

$$\overline{KM}^2 = \overline{CK}^2 + \overline{CM}^2 - 2\overline{CK} \cdot \overline{CM} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (5)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (5):

$$\overline{KM}^2 = \overline{CK}^2 + \overline{CM}^2 - b\sqrt{2} \cdot \overline{KM} \quad (6)$$

De les expressions (4) i (6):

$$\overline{KM}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{BM}^2 \Leftrightarrow -2b^2 + b\sqrt{2}(\overline{AK} + \overline{BM}) + \overline{CK}^2 + \overline{CM}^2 = \overline{CK}^2 + \overline{CM}^2 - b\sqrt{2} \cdot \overline{KM}$$

$$\Leftrightarrow -2b^2 + b\sqrt{2}(\overline{AK} + \overline{BM}) = -b\sqrt{2} \cdot \overline{KM} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2b = (\overline{AK} + \overline{KM} + \overline{BM})\sqrt{2} \Leftrightarrow 2b = c\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{b}{c} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6.- L'altura baixada des del vèrtex de l'angle recte d'un triangle rectangle divideix el triangle en dos triangles en cadascun dels quals s'ha inscrit una circumferència. Determineu els angles i l'àrea del triangle format pels catets i la recta que uneix els centres de les circumferències inscrites si l'altura sobre la hipotenusa del triangle inicial és h.

Shariguin I294

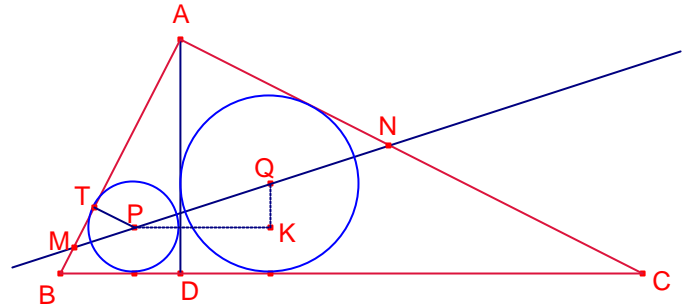
Solució:

Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$ $A = 90^\circ$.

Suposem que $\overline{AB} \leq \overline{AC}$.

Siga $h = \overline{AD}$, altura del triangle.

Siga $\beta = \angle ABC$.



Siga r, R els radis de les circumferències inscrites als triangles $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ i P, Q els centres respectius.

Siga $m = \overline{BD}$.

Siga el triangle rectangle $\triangle PKQ$ (veure figura) format per la recta PK perpendicular a la recta altura AD i la recta QK perpendicular al costat BC.

Per ser $\triangle ABD$ i $\triangle ACD$ triangles rectangles:

$\overline{PK} = r + R$, $\overline{QK} = R - r$.

Siga $\alpha = \angle AMN$. Siga $\gamma = \angle QPK$.

Notem que $\alpha = \beta - \gamma$.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{m}.$$

Els triangles $\triangle ABD$ i $\triangle ACD$ són semblants, aplicant el teorema de Tales: $\frac{r}{R} = \frac{m}{h}$.

$$\text{Aleshores: } R + r = \left(\frac{h}{m} + 1\right)r, \quad R - r = \left(\frac{h}{m} - 1\right)r. \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{R - r}{R + r} = \frac{\left(\frac{h}{m} - 1\right)r}{\left(\frac{h}{m} + 1\right)r} = \frac{h - m}{h + m}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \frac{\frac{h}{m} - \frac{h - m}{h + m}}{1 + \frac{h}{m} \frac{h - m}{h + m}} = 1.$$

Aleshores, $\alpha = \angle AMN = 45^\circ$. Per tant, $\angle ANM = 45^\circ$. Aleshores, $\overline{AM} = \overline{AN}$.

Siga T el punt projecció de P sobre el costat \overline{AB} .

$\overline{MT} = \overline{TP} = r$.

$$\overline{AT} = \frac{\overline{AB} - \overline{BD} + \overline{AD}}{2} = \frac{\sqrt{h^2 + m^2} - m + h}{2}. \quad r = \frac{\overline{BM} + \overline{AD} - \overline{AB}}{2} = \frac{m + h - \sqrt{h^2 + m^2}}{2}$$

$$\overline{AM} = \overline{AT} + \overline{MT} = \frac{\sqrt{h^2 + m^2} - m + h}{2} + r = \frac{\sqrt{h^2 + m^2} - m + h}{2} + \frac{m + h - \sqrt{h^2 + m^2}}{2} = h.$$

Aleshores l'àrea del triangle $\triangle MNA$ és:

$$S_{MNA} = \frac{\overline{AM}^2}{2} = \frac{b^2}{2}.$$

7.- En els costats \overline{AB} i \overline{BC} del quadrat s'agafen els punts M, N, respectivament, tal que $\overline{BM} + \overline{BN} = \overline{AB}$. Demostreu que les rectes DM, DN divideixen la diagonal \overline{AC} en tres segments amb els quals és pot construir un triangle tal que un dels seus angles mesura 60° .

Shariguin I288

Solució:

Les rectes DM, DN tallen la diagonal \overline{AC} en els punts P, Q, respectivament.

Siga $a = \overline{AB}$, $x = \overline{AM}$, $x < a$.

$\overline{BM} = a - x$, $\overline{BN} = a - \overline{BM} = x$, $\overline{CN} = a - x$

Siga $\alpha = \angle ADM$, $\beta = \angle CDN$.

Aleshores: $\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$,

$\sin \beta = \frac{a - x}{\sqrt{a^2 + (a - x)^2}}$, $\cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle APD$:

$\frac{\overline{AP}}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(45^\circ + \alpha)}$. Aleshores, $\overline{AP} = a\sqrt{2} \frac{x}{a + x}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle CQD$:

$\frac{\overline{CQ}}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin(45^\circ + \beta)}$. Aleshores, $\overline{CQ} = a\sqrt{2} \frac{x}{a + x}$.

$\overline{PQ} = \overline{AC} - \overline{AP} - \overline{CQ} = a\sqrt{2} - a\sqrt{2} \frac{x}{a + x} - a\sqrt{2} \frac{a - x}{2a - x} = a\sqrt{2} \frac{a^2 - ax + x^2}{(a + x)(2a - x)}$.

Vegem que els segments \overline{AP} , \overline{PQ} , \overline{CQ} són els costats d'un triangle.

Vegem que $\overline{AP} + \overline{PQ} > \overline{CQ}$:

$$a\sqrt{2} \frac{x}{a + x} + a\sqrt{2} \frac{a^2 - ax + x^2}{(a + x)(2a - x)} > a\sqrt{2} \frac{a - x}{2a - x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{a + x} + \frac{a^2 - ax + x^2}{(a + x)(2a - x)} > \frac{a - x}{2a - x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2a - x) + a^2 - ax + x^2 > (a - x)(a + x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2ax - x^2 + a^2 - ax + x^2 > a^2 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax > -x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a > -x.$$

Vegem que $\overline{AP} + \overline{CQ} > \overline{PQ}$:

$$a\sqrt{2} \frac{x}{a + x} + a\sqrt{2} \frac{a - x}{2a - x} > a\sqrt{2} \frac{a^2 - ax + x^2}{(a + x)(2a - x)} \Leftrightarrow$$

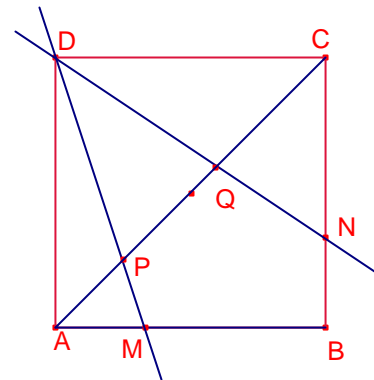
$$\Leftrightarrow \frac{x}{a + x} + \frac{a - x}{2a - x} > \frac{a^2 - ax + x^2}{(a + x)(2a - x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2a - x) + (a - x)(a + x) > a^2 - ax + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2ax - x^2 + a^2 - x^2 > a^2 - ax + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax > x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a > x.$$



Vegem que $\overline{CQ} + \overline{PQ} > \overline{AP}$:

$$\begin{aligned} a\sqrt{2} \frac{a-x}{2a-x} + a\sqrt{2} \frac{a^2 - ax + x^2}{(a+x)(2a-x)} &> a\sqrt{2} \frac{x}{a+x} && \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{a-x}{2a-x} + \frac{a^2 - ax + x^2}{(a+x)(2a-x)} &> \frac{x}{a+x} && \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a-x)(a+x) + a^2 - ax + x^2 &> x(2a-x) && \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 - x^2 + a^2 - ax + x^2 &> 2ax - x^2 && \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2a^2 &> 3ax - x^2 \geq 2ax && \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a &> x. && \end{aligned}$$

Aleshores, el segments $\overline{AP}, \overline{PQ}, \overline{CQ}$ formen un triangle.

Siga γ l'angle oposat al costat \overline{PQ} format pel triangle de costats $\overline{AP}, \overline{PQ}, \overline{CQ}$. Vegem, utilitzant el teorema del cosinus, que $\gamma = 60^\circ$.

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{\overline{PQ}^2 - \overline{AP}^2 - \overline{CQ}^2}{-2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{CQ}}. \\ \cos \gamma &= \frac{\left(a\sqrt{2} \frac{a^2 - ax + x^2}{(a+x)(2a-x)}\right)^2 - \left(a\sqrt{2} \frac{x}{a+x}\right)^2 - \left(a\sqrt{2} \frac{a-x}{2a-x}\right)^2}{-2 \left(a\sqrt{2} \frac{x}{a+x}\right) \left(a\sqrt{2} \frac{a-x}{2a-x}\right)}. \\ \cos \gamma &= \frac{\left(\frac{a^2 - ax + x^2}{(a+x)(2a-x)}\right)^2 - \left(\frac{x}{a+x}\right)^2 - \left(\frac{a-x}{2a-x}\right)^2}{-2 \left(\frac{x}{a+x}\right) \left(\frac{a-x}{2a-x}\right)}. \\ \cos \gamma &= \frac{(a^2 - ax + x^2)^2 - x^2(2a-x)^2 - (a-x)^2(a+x)^2}{-2x(a-x)(a+x)(2a-x)}. \\ \cos \gamma &= \frac{-x^4 + 2ax^2 + a^2x^2 - 2a^3x}{-2x(a-x)(a+x)(2a-x)}. \\ \cos \gamma &= \frac{-x(a-x)(a+x)(2a-x)}{-2x(a-x)(a+x)(2a-x)}. \\ \cos \gamma &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Aleshores, $\gamma = 60^\circ$.

8.- Una circumferència està inscrita en un trapezi. Determineu l'àrea del trapezi, si es coneix la longitud a d'una de les bases i els segments b i d , en els quals queda dividits pel punt de tangència un dels costats no paral·lels (el segment b és l'adjacent a la base donada a).

Shariguin I168.

Solució:

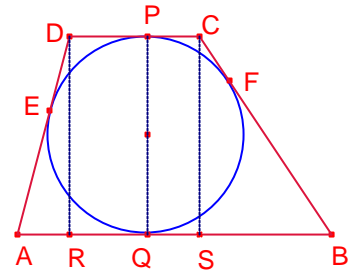
Siga el trapezi ABCD de costats paral·lels \overline{AB} , \overline{CD} .

Siga E i F els punts de tangència de la circumferència inscrita al trapezi i els costats no paral·lels \overline{AD} i \overline{BC} , respectivament.

Per hipòtesi $a = \overline{AB}$, $b = \overline{AE}$, \overline{BE} .

Siga Q i P els punts de tangència de la circumferència inscrita al trapezi i els costats paral·lels \overline{AB} i \overline{CD} , respectivament.

Aleshores, $\overline{AQ} = b$, $\overline{DP} = d$, $\overline{BQ} = \overline{BF} = a - b$.



Siga $x = \overline{CP}$, aleshores, $\overline{CF} = x$.

Siga R la projecció de D sobre el costat \overline{AB} . Siga S la projecció de C sobre el costat \overline{AB} .

L'altura del trapezi és $\overline{PQ} = \overline{DR} = \overline{CS}$.

$$\overline{AR} = \overline{AQ} - \overline{DP} = b - d.$$

Aplicant el teorema de Pitàgorès al triangle rectangle $\triangle ARD$:

$$\overline{DR} = \sqrt{(b+d)^2 - (b-d)^2} = 2\sqrt{bd} \quad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgorès al triangle rectangle $\triangle BSC$:

$$\overline{CS} = \sqrt{(a-b+x)^2 - (a-b-x)^2} = 2\sqrt{(a-b)x} \quad (2)$$

Igualant les expressions (1) i (2)

$$2\sqrt{bd} = 2\sqrt{(a-b)x}. \text{ Resolent l'equació en la incògnita } x:$$

$$x = \frac{bd}{a-b}.$$

Aleshores l'àrea del trapezi és:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \overline{PQ} = \frac{a+d+x}{2} 2\sqrt{bd} = \left(a+d + \frac{bd}{a-b} \right) \sqrt{bd} = \frac{a^2 + a(d-b)}{a-b} \sqrt{bd}.$$

9.- Els costats \overline{AB} i \overline{CD} d'un quadrilàter ABCD són perpendiculars i són els diàmetres de dues circumferències iguals i tangents de radi r . Determineu l'àrea del quadrilàter ABCD si $\overline{BC} : \overline{AD} = k$.
Shariguin I172

Solució:

Suposem que $0 < k \leq 1$.

$$\overline{BC} : \overline{AD} = k, \overline{BC} = k \cdot \overline{AD} \quad (1)$$

Les rectes AB i CD s'intersecten en un punt P.

Siguen E i F els centres de les circumferències.

Siga $\overline{BP} = x$, $\overline{CP} = y$.

L'àrea del quadrilàter ABCD és:

$$S_{ABCD} = S_{APD} - S_{BPC} = \frac{(2r+x)(2r+y)}{2} - \frac{xy}{2} = \frac{4r^2 + 2r(x+y)}{2} = 2r^2 + r(x+y).$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle BPC$:

$$\overline{BC}^2 = x^2 + y^2 \quad (2)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2):

$$x^2 + y^2 = k^2 \cdot \overline{AD}^2 \quad (3)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle APD$:

$$\overline{AD}^2 = (2r+x)^2 + (2r+y)^2.$$

$$\overline{AD}^2 = 8r^2 + x^2 + y^2 + 4r(x+y) \quad (4)$$

Substituint l'expressió (4) en l'expressió (3)

$$x^2 + y^2 = k^2(8r^2 + x^2 + y^2 + 4r(x+y)) \quad (5)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle EPF$:

$$4r^2 = (r+x)^2 + (r+y)^2.$$

$$4r^2 = x^2 + y^2 + 2r(x+y) + 2r^2.$$

$$x^2 + y^2 + = 2r^2 - 2r(x+y) \quad (6)$$

Substituint l'expressió (6) en l'expressió (5):

$$2r^2 - 2r(x+y) = k^2(8r^2 + (2r^2 - 2r(x+y)) + 4r(x+y))$$

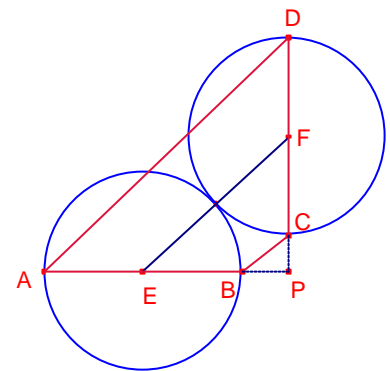
$$r - (x+y) = k^2(5r + (x+y)) \quad (7)$$

Aïllant $x+y$:

$$x+y = \frac{1-5k^2}{1+k^2} r.$$

Aleshores la superfície del quadrilàter ABCD és:

$$S_{ABCD} = 2r^2 + r(x+y) = 2r^2 + r \left(\frac{1-5k^2}{1+k^2} \right) = \frac{3r^2(1-k^2)}{1+k^2}.$$



10.- Donat un angle de magnitud α amb vèrtex A i un punt B interior a l'angle a distàncies a i b dels costats de l'angle. Determineu \overline{AB} .
Shariguin I177.

Solució:

Siguen E i D els dos punt dels costats de l'angle tal que $\overline{BE} = a$, $\overline{BD} = b$.
Siga $\beta = \angle BAD$.

Aplicant raons trigonomètriques als triangles rectangles $\triangle ADB$, $\triangle AEB$:

$$\sin \beta = \frac{b}{AB}$$

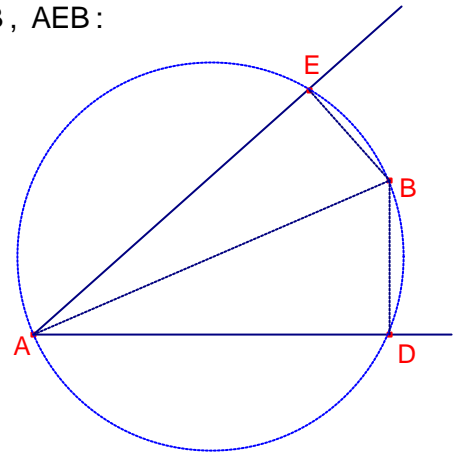
$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{a}{AB}$$

Dividint les expressions:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a + b \cdot \cos \alpha} \quad (1)$$



El quadrilàter ADBE és inscritible ja que els angles oposats són suplementaris.

Aplicant el teorema de Ptolomeu:

$$\overline{AB} \cdot \overline{DE} = a \cdot \overline{AD} + b \cdot \overline{AE}$$

$$\text{Aleshores, } \overline{AB} = \frac{a \cdot \overline{AD} + b \cdot \overline{AE}}{\overline{DE}} \quad (2)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle DBE$:

$$\overline{DE}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$\overline{DE} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha} \quad (3)$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle ADB$:

$$\overline{AD} = \frac{b}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$\overline{AD} = \frac{b(a + b \cdot \cos \alpha)}{b \cdot \sin \alpha}$$

$$\overline{AD} = \frac{a + b \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (4)$$

Anàlogament aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle AEB$:

$$\overline{AE} = \frac{b + a \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (5)$$

Substituint les expressions (3), (4) i (5) en l'expressió (2):

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \frac{a \frac{b + a \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} + b \frac{a + b \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha}} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha}} = \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha}}{\sin \alpha} \end{aligned}$$