

1.- L'altura d'un triangle rectangle sobre la hipotenusa és h . Demostreu que els vèrtexs dels angles aguts i les projeccions del peu de l'altura sobre els catets estan en una circumferència. Determineu la longitud de la corda de circumferència tallada per l'altura i els segments d'aquesta corda, en els quals la divideix la hipotenusa.
Shariguin I295.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$.

Siga $\overline{AD} = h$ l'altura sobre la hipotenusa.

Siguen E i F les projeccions de D sobre els catets \overline{AC} i \overline{AB} , respectivament.

Siga $\alpha = \angle ABC$.

$\angle AEF = \alpha$, aleshores, $\angle CEF = 180^\circ - \alpha$.

Per tant el quadrilàter $BCEF$ és inscripcible ja que té els angles oposats suplementaris

L'altura AD talla la circumferència circumscrita al quadrilàter $BCEF$ en els punts P, Q .

Hem de calcular les mesures dels segments $\overline{PQ}, \overline{PD}$ i \overline{QD} .

Aplicant el teorema de l'altura al triangle rectangle $\triangle ABC$:

$$h^2 = \overline{BD} \cdot \overline{CD}$$

Aplicant la potència del punt D respecte de la circumferència:

$$\overline{PD} \cdot \overline{QD} = \overline{BD} \cdot \overline{CD}.$$

$$\text{Aleshores, } \overline{PD} = \frac{h^2}{\overline{QD}} \quad (1)$$

Els triangles $\triangle DBA$, $\triangle FDA$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{AF} \cdot c = h^2$$

Aplicant la potència del punt A respecte de la circumferència:

$$\overline{AP}(\overline{AD} + \overline{QD}) = \overline{AF} \cdot c. \quad \overline{AP}(h + \overline{QD}) = h^2.$$

$$\overline{AP} = \frac{h^2}{h + \overline{QD}} \quad (2)$$

Aplicant la potència del punt A respecte de la circumferència:

$$\overline{AP}(\overline{AP} + \overline{PD} + \overline{QD}) = h^2 \quad (3)$$

Substituint les expressions (1) (2) en l'expressió (3):

$$\frac{h^2}{h + \overline{QD}} \left(\frac{h^2}{h + \overline{QD}} + \frac{h^2}{\overline{QD}} + \overline{QD} \right) = h^2. \text{ Simplificant:}$$

$$\frac{1}{h + \overline{QD}} \left(\frac{h^2}{h + \overline{QD}} + \frac{h^2}{\overline{QD}} + \overline{QD} \right) = 1.$$

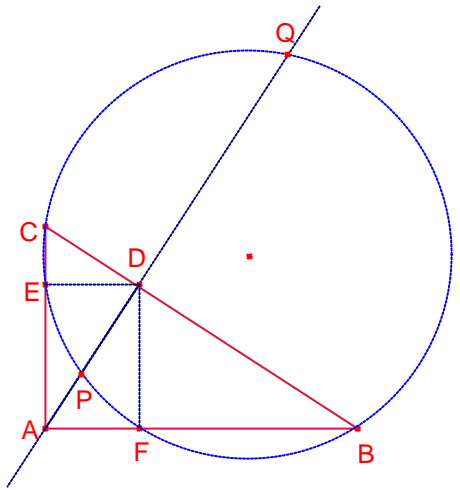
$\overline{QD}^2 - h \cdot \overline{QD} - h^2 = 0$. Resolent l'equació en la incògnita \overline{QD} :

$$\overline{QD} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} h \quad (4)$$

Substituint l'expressió (4) en l'expressió (1):

$$\overline{PD} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} h.$$

$$\overline{PQ} = \overline{PD} + \overline{QD} = h\sqrt{5}.$$



2.- La raó entre el radi de la circumferència circumscrita i el radi de la inscrita a un trapezi és igual a k . Determineu l'angle agut del trapezi.
Gúsiev 188

Solució:

En aquestes condicions el trapezi és isòsceles.

Siga $\overline{AB} = 2x$, $\overline{DC} = 2y$.

Siga $\alpha = \angle DAB$. Siga T el punt de tangència de la circumferència inscrita i el costat \overline{AD} .

$\overline{AT} = x$, $\overline{DT} = y$.

Siga H la projecció de D sobre el costat \overline{AB} .

$\overline{AH} = x - y$, $DH = 2r$. $\sin \alpha = \frac{2r}{x+y}$, $\cos \alpha = \frac{x-y}{x+y}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AHD$:

$(x+y)^2 = (2r)^2 + (x-y)^2$. Simplificant:

$$xy = r^2 \quad (1)$$

Siga $d = \overline{BD}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABD$:

$$\frac{d}{\sin \alpha} = 2R. \text{ Aleshores, } d = 2R \cdot \sin \alpha \quad (2)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABD$:

$$d^2 = (x+y)^2 + (2x)^2 - 2(x+y)2x \cdot \cos \alpha \quad (3)$$

Igualant les expressions (2) (3):

$$(2R \cdot \sin \alpha)^2 = (x+y)^2 + (2x)^2 - 2(x+y)2x \cdot \cos \alpha$$

$$4R^2 \sin^2 \alpha = \left(\frac{2r}{\sin \alpha} \right)^2 + 4x^2 - 4x(x-y)$$

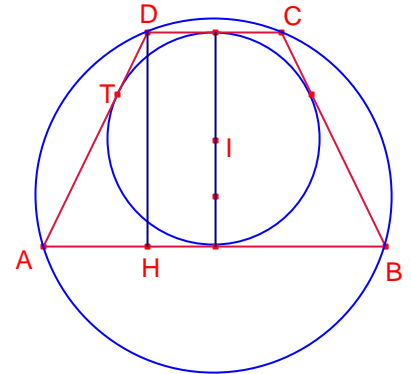
$$4R^2 \sin^2 \alpha = \left(\frac{2r}{\sin \alpha} \right)^2 + 4r^2$$

$$R^2 \sin^4 \alpha = r^2(1 + \sin^2 \alpha).$$

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\sin^4 \alpha}, \quad \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\sin^4 \alpha} = k^2. \text{ Resolent l'equació en } \sin \alpha:$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4k^2}}{2}}, \quad \sqrt{2} \leq k.$$

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{1}{k} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4k^2}}{2}} \right), \quad \sqrt{2} \leq k.$$



3.- La corda comuna de dues circumferències secants és el diàmetre d'una d'elles. Per un dels extrems d'aquest diàmetre es tracen tangents a les dues circumferències. Demostreu que l'altre extrem del diàmetre i els punts migs dels segments de les tangents que tallen les circumferències són els vèrtexs d'un triangle rectangle. Gúsiév 490.

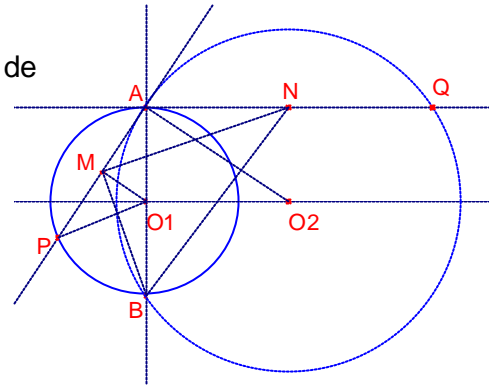
Solució:

Siga la circumferència de centre O_1 i diàmetre \overline{AB} i radi r .

Siga la circumferència de centre O_2 que passa pels punts A, B de radi R .

Les rectes tangents a les dues circumferències tallen les circumferències en els punts P, Q .

Siga M el punt mig del segment \overline{AP} , N el punt mig del segment \overline{AQ} .



Volem provar que el triangle $\triangle BMN$ és rectangle.

La recta AQ és perpendicular al diàmetre \overline{AB} .

La recta O_1O_2 és perpendicular al diàmetre \overline{AB} .

La recta AP és perpendicular a la recta AO_2 .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AO_1O_2$.

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{R^2 - r^2}. \quad \overline{O_1O_2} = \overline{AN} = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Siga $\alpha = \angle AO_2O_1$. Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle AO_1O_2$:

$$\sin \alpha = \frac{r}{R}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}.$$

$$\angle PAB = \alpha, \quad \overline{O_1A} = \overline{O_1P} = r.$$

Els triangles rectangles $\triangle AO_1O_2$, $\triangle O_1MA$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AM}}{r} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}. \quad \text{Aleshores, } \overline{AM} = \frac{r\sqrt{R^2 - r^2}}{R}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle MNA$:

$$\overline{MN}^2 = \left(\frac{r\sqrt{R^2 - r^2}}{R} \right)^2 + \left(\sqrt{R^2 - r^2} \right)^2 - 2 \frac{r\sqrt{R^2 - r^2}}{R} \sqrt{R^2 - r^2} \cos(90^\circ + \alpha).$$

$$\overline{MN}^2 = \left(\frac{r\sqrt{R^2 - r^2}}{R} \right)^2 + \left(\sqrt{R^2 - r^2} \right)^2 + 2 \frac{r(R^2 - r^2)}{R} \sin \alpha.$$

$$\overline{MN}^2 = \frac{R^4 + 2r^2R^2 - 3r^4}{R^2}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle AMB$:

$$\overline{MB}^2 = (2r)^2 + \left(\frac{r\sqrt{R^2 - r^2}}{R} \right)^2 - 2 \cdot 2r \frac{r\sqrt{R^2 - r^2}}{R} \cos \alpha.$$

$$\overline{MB}^2 = (2r)^2 + \left(\frac{r\sqrt{R^2 - r^2}}{R} \right)^2 - 2 \cdot 2r \frac{r\sqrt{R^2 - r^2}}{R} \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}.$$

$$\overline{MB}^2 = \frac{r^2 R^2 + 3r^4}{R^2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABN$:

$$\overline{BN}^2 = (2r)^2 + \left(\sqrt{R^2 - r^2}\right)^2 = R^2 + 3r^2.$$

$$\overline{MN}^2 + \overline{MB}^2 = \frac{R^4 + 2r^2 R^2 - 3r^4}{R^2} + \frac{r^2 R^2 + 3r^4}{R^2} = R^2 + 3r^2 = \overline{MB}^2.$$

Aleshores el triangle $\triangle BMN$ és rectangle.

4.- En una circumferència c donada, hi inscrivim un quadrilàter q , les diagonals del qual són perpendiculars.

QÜESTIÓ 1:

Proveu que, siga quin siga el quadrilàter inscrit de diagonals perpendiculars, la suma dels quadrats de dos costats oposats és un valor constant.

QÜESTIÓ 2:

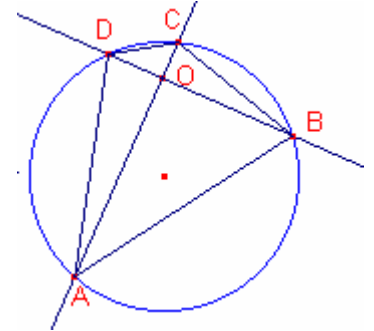
Interpreteu geomètricament el valor d'aquesta constant.

Xtec gener 2009

Solució:

Siga la circumferència c de radi R .

Siga el quadrilàter $ABCD$ inscrit en la circumferència tal que \overline{AC} i \overline{BD} són perpendiculars les quals es tallen en el punt O .



Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\triangle ABO$, $\triangle CDO$:

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2.$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2.$$

Sumant les dues expressions:

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 \quad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\triangle ADO$, $\triangle BCO$:

$$\overline{AD}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OD}^2.$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2.$$

Sumant les dues expressions:

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 \quad (2)$$

Aleshores:

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = k.$$

Vegem quan val la constant.

Siga $\alpha = \angle BAC$, $\angle ABD = 90^\circ - \alpha$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \alpha} = 2R. \text{ Aleshores, } \overline{BC}^2 = (2R)^2 \sin^2 \alpha$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABD$:

$$\frac{\overline{AD}}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R. \text{ Aleshores, } \overline{AD}^2 = (2R)^2 \cos^2 \alpha$$

$$\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = (2R)^2 \sin^2 \alpha + (2R)^2 \cos^2 \alpha = (2R)^2.$$

$$\text{Aleshores, } \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = (2R)^2.$$

Aleshores la suma dels quadrats de dos costats oposats és un valor constant i és igual a l'àrea d'un quadrat de costat $2R$, és a dir, l'àrea del quadrat circumscrit a la circumferència.

5.- Siga ABCD un tetràedre amb tres arestes perpendiculars dos a dos en el vèrtex D. Siga O el centre de la seua esfera circumscrita. Proveu que el baricentre T de la cara ABC pertany a la recta RO.
Duel Matemàtic R. Txeca, Polònia, Àustria, 2008.

Solució:

Considerem el tetràedre ABCD amb les següents coordenades:

$D(0,0,0)$, $A(0,a,0)$, $B(b,0,0)$, $C(0,0,c)$

Notem que les arestes DA, DB, DC són perpendiculars dos a dos.

Calculem el centre $O(r,s,t)$ de l'esfera circumscrita al tetràedre ABCD.

$d(O,A) = d(O,B) = d(O,C) = d(O,D)$.

$$d^2(O,A) = d^2(O,D)$$

$$r^2 + s^2 + t^2 = r^2 + (s-a)^2 + t^2. \text{ Simplificant:}$$

$$-2as + a^2 = 0, \text{ aleshores, } s = \frac{a}{2}.$$

$$d^2(O,B) = d^2(O,D)$$

$$r^2 + s^2 + t^2 = (r-b)^2 + s^2 + t^2. \text{ Simplificant:}$$

$$-2br + b^2 = 0, \text{ aleshores, } r = \frac{b}{2}.$$

$$d^2(O,C) = d^2(O,D)$$

$$r^2 + s^2 + t^2 = r^2 + s^2 + (t-c)^2. \text{ Simplificant:}$$

$$-2ct + c^2 = 0, \text{ aleshores, } t = \frac{c}{2}.$$

Aleshores del centre de l'esfera circumscrita al tetràedre és:

$$O\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right).$$

El baricentre del triangle $\triangle ABC$ és:

$$T\left(\frac{b}{3}, \frac{a}{3}, \frac{c}{3}\right).$$

Els vectors \vec{DO}, \vec{DT} són linealment independents, aleshores, T pertany a la recta DO.

6.- L'ortocentre H d'un triangle acutangle $\triangle ABC$ es transforma en els punts A_1, B_1, C_1 amb les simetries axials els eixos de les quals són els costats a, b, c , respectivament. Si $\angle C_1AB_1 = \angle CA_1B$, $\angle A_1BC_1 = \angle AB_1C$, $\angle B_1CA_1 = \angle BC_1A$, proveu que el triangle és equilàter.

Solució:

$$\angle HAB = 90^\circ - B, \quad \angle HBA = 90^\circ - A.$$

$$\text{Per tant, } \angle C_1AB = 90^\circ - B, \quad \angle C_1BA = 90^\circ - A.$$

$$\text{Aleshores, } \angle BC_1A = A + B.$$

$$\angle HCB = 90^\circ - B, \quad \angle HCA = 90^\circ - A.$$

$$\text{Per tant, } \angle A_1CB = 90^\circ - B, \quad \angle B_1CA = 90^\circ - A.$$

$$\text{Aleshores, } \angle B_1CA_1 = 2(90^\circ - B + 90^\circ - A) = 360^\circ - 2(A + B).$$

Com $\angle B_1CA_1 = \angle BC_1A$, aleshores,

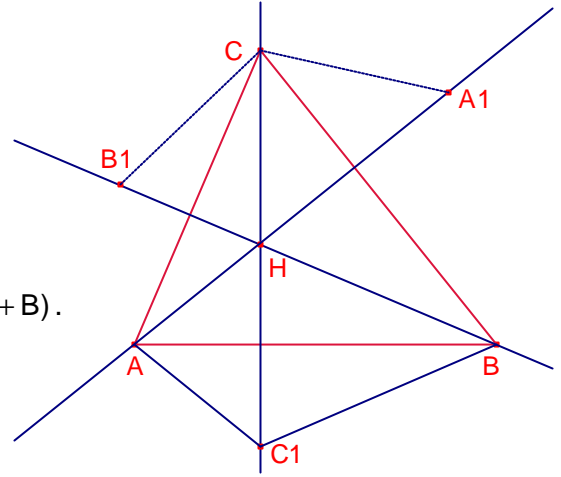
$$360^\circ - 2(A + B) = A + B. \text{ Simplificant:}$$

$$A + B = 120^\circ.$$

Anàlogament, $A + C = 120^\circ, B + C = 120^\circ$.

Considerem el sistema:

$$\begin{cases} A + B = 120^\circ \\ A + C = 120^\circ \\ B + C = 120^\circ \end{cases}, \text{ la solució del qual és } \begin{cases} A = 60^\circ \\ B = 60^\circ \\ C = 60^\circ \end{cases}, \text{ és a dir, el triangle } \triangle ABC \text{ és equilàter.}$$



7.- En el sector d'una circumferència de radi R s'ha inscrit una circumferència de radi r .

La corda del sector mesura $2a$. Demostreu que $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}$.

Lidski 387.

Solució:

Siga la circumferència de radi R i centre O .

Siga el sector de radis $\overline{OA} = \overline{OB}$, $\overline{AB} = 2a$.

Siga la circumferència tangent al sector de centre P i radi r .

Siga M el punt mig de la corda \overline{AB} .

$\overline{AM} = a$.

Siga T el punt de tangència de la circumferència inscrita al sector i el radi \overline{OA} .

$\overline{PT} = r$, $\overline{OP} = R - r$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OMA}$, $\overset{\Delta}{OTP}$ són semblants.

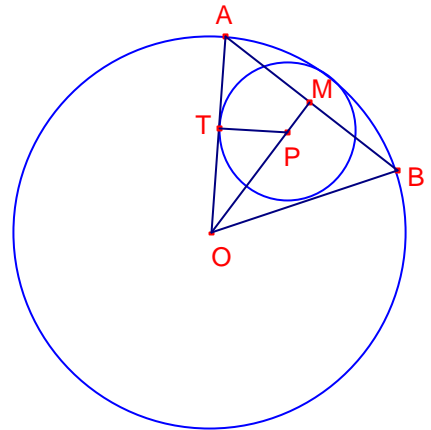
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{R}{a} = \frac{R-r}{r}.$$

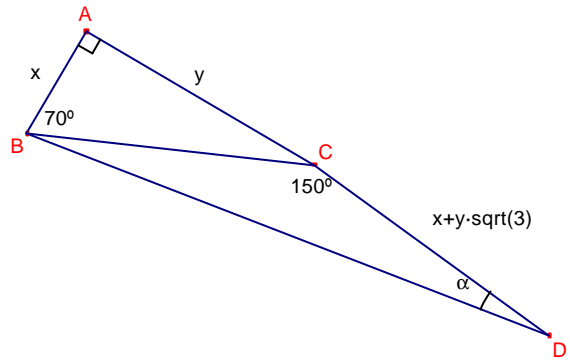
$$\frac{R}{a} = \frac{R}{r} - \frac{r}{r}.$$

$$\frac{R}{a} = \frac{R}{r} - \frac{R}{R}. \text{ Simplificant:}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R}, \text{ aleshores, } \frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}.$$



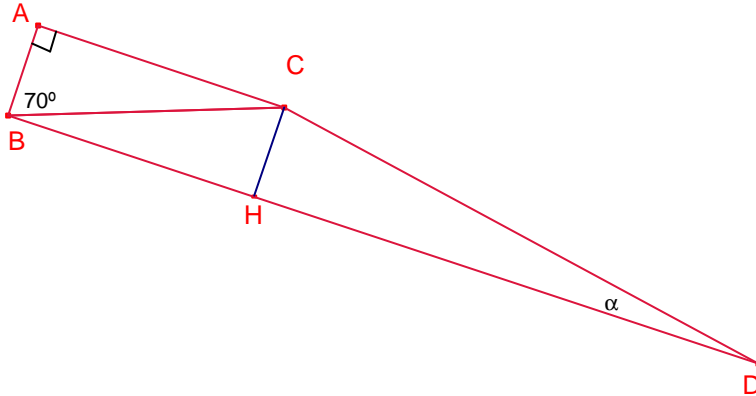
8.- Donat el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$,
 $\overline{AB} = x$, $\overline{AC} = y$, es construeix el triangle $\triangle BCD$
 tal que $\angle BCD = 150^\circ$, $\overline{CD} = x + \sqrt{3}y$.
 Calculeu la mesura de l'angle $\angle BDC$.



Solució:

Siga $\alpha = \angle BDC$

Siga \overline{CH} altura del triangle $\triangle BCD$.



Aleshores, $\angle HCD = 90^\circ - \alpha$.

$\angle HCB = 150^\circ - (90^\circ - \alpha) = 60^\circ + \alpha$.

$\angle CBH = 30^\circ - \alpha$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle BHC$:

$$\overline{CH} = \sqrt{x^2 + y^2} \sin(30^\circ - \alpha).$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle CHD$:

$$\overline{CH} = (x + \sqrt{3}y) \sin \alpha.$$

Igualant les dues expressions:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \sin(30^\circ - \alpha) = (x + \sqrt{3}y) \sin \alpha.$$

$$\sin(30^\circ - \alpha) = 2 \left(\frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \sin \alpha.$$

$$\sin(30^\circ - \alpha) = 2 \left(\sin 30^\circ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \cos 30^\circ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \sin \alpha.$$

$$\sin(30^\circ - \alpha) = 2(\sin 30^\circ \sin 20^\circ + \cos 30^\circ \cos 20^\circ) \sin \alpha.$$

$$\sin(30^\circ - \alpha) = 2 \cos 10^\circ \sin \alpha.$$

$$\sin(30^\circ - \alpha) = \sin(\alpha + 10^\circ) + \sin(\alpha - 10^\circ).$$

$$\sin(30^\circ - \alpha) - \sin(\alpha + 10^\circ) = \sin(\alpha - 10^\circ).$$

$$2 \cos 20^\circ \sin(10^\circ - \alpha) = \sin(\alpha - 10^\circ).$$

$$\sin(\alpha - 10^\circ)(1 + 2 \cos 20^\circ) = 0.$$

Aleshores, $\sin(\alpha - 10^\circ) = 0$. Per tant, $\alpha = 10^\circ$.

9.- Des d'un punt P exterior a una circumferència es tracen dues rectes que generen dues cordes \overline{AB} , \overline{CD} de longituds 10 i 7 unitats respectivament. Sabent que les dues rectes formen un angle de 60° i que la distància de P a B és de 8 unitats, calculeu el radi de la circumferència.

Oposicions València 2008

Solució:

Siga $x = \overline{PD}$. Siga R el radi de la circumferència. Aplicant la potència de P respecte de la circumferència:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$

$$18 \cdot 8 = (7 + x)x. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$x = 9.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle

$\triangle APC$:

$$\overline{AC}^2 = 18^2 + 16^2 - 2 \cdot 18 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2}.$$

$$\overline{AC} = 2\sqrt{73}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle APD$:

$$\overline{AD}^2 = 18^2 + 9^2 - 2 \cdot 18 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2}.$$

$$\overline{AD} = 9\sqrt{3}.$$

Siga $\alpha = \angle ACD$.

Aplicant el teorema del sinus al triangle $\triangle APC$:

$$\frac{\overline{AP}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ}.$$

$$\frac{18}{\sin \alpha} = \frac{2\sqrt{73}}{\sin 60^\circ}.$$

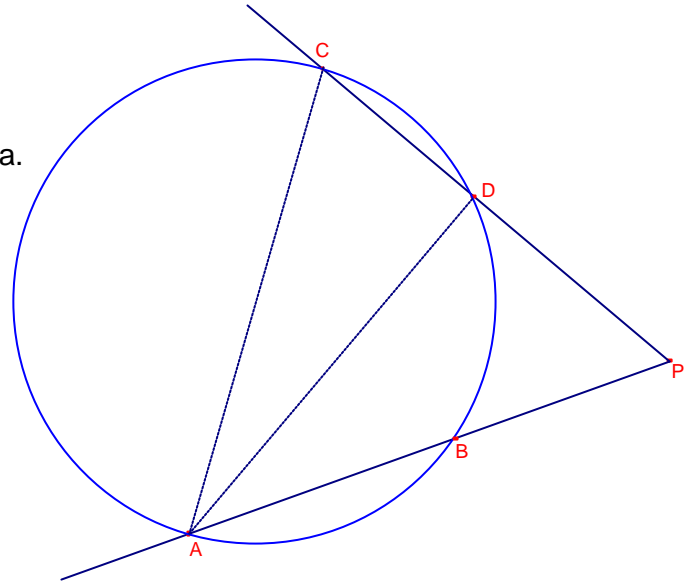
$$\sin \alpha = \frac{18 \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{73}} = \frac{9\sqrt{219}}{146}.$$

Aplicant el teorema del sinus al triangle $\triangle ACD$:

$$\frac{\overline{AD}}{\sin \alpha} = 2R.$$

$$\frac{9\sqrt{3}}{\frac{9\sqrt{219}}{146}} = 2R. \text{ Aïllant la incògnita R:}$$

$$R = \sqrt{73}.$$



10.- Siga P un punt qualsevol de la circumferència C_1 inscrita a un quadrat de costat $2a$. Anomenem α i β els angles respectius sota els quals el punt P veu cadascuna de les dues diagonals del quadrat.

Demostreu que, en variar el punt P sobre la circumferència c , la quantitat $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta$ es manté constant i trobeu el valor d'aquesta quantitat.

Xtec Juny de 2009.

Solució:

Considerem el quadrat ABCD de centre O i costat $\overline{AB} = 2a$ amb les següents coordenades cartesianes:

$A(-a,-a)$, $B(a,-a)$, $C(a,a)$, $D(-a,a)$, $O(0,0)$.

Siga $\alpha = \angle BPD$, $\beta = \angle APC$.

L'equació de la circumferència C_1 inscrita al quadrat té equació:

$$C_1 \equiv x^2 + y^2 = a^2.$$

Siga $P(c,d)$ un punt de la circumferència C_1 . Aleshores,

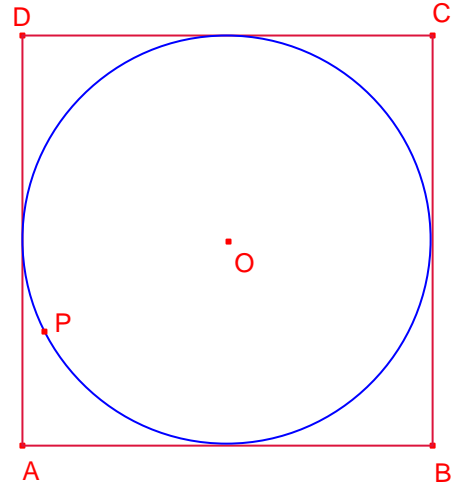
$$c^2 + d^2 = a^2.$$

$$\overline{PB}^2 = (c - a)^2 + (d + a)^2 = 3a^2 + 2a(d - c).$$

$$\overline{PD}^2 = (c + a)^2 + (d - a)^2 = 3a^2 + 2a(c - d)$$

$$\overline{PA}^2 = (c + a)^2 + (d + a)^2 = 3a^2 + 2a(c + d)$$

$$\overline{PB}^2 = (c - a)^2 + (d - a)^2 = 3a^2 - 2a(c + d)$$



$$\overline{BD} = \overline{AC} = 2\sqrt{2}a.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle BPD$:

$$\cos \alpha = \frac{8a^2 - (3a^2 + 2a(d - c)) - (3a^2 + 2a(c - d))}{-2\sqrt{3a^2 + 2a(d - c)}\sqrt{3a^2 + 2a(c - d)}} = \frac{a^2}{-\sqrt{3a^2 + 2a(d - c)}\sqrt{3a^2 + 2a(c - d)}}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{(3a^2 + 2a(d - c))(3a^2 + 2a(c - d))}{a^4} = \frac{5a^2 + 8cd}{a^2}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle APC$:

$$\cos \beta = \frac{8a^2 - (3a^2 + 2a(c + d)) - (3a^2 - 2a(c + d))}{-2\sqrt{3a^2 + 2a(c + d)}\sqrt{3a^2 - 2a(c + d)}} = \frac{a^2}{-\sqrt{3a^2 + 2a(c + d)}\sqrt{3a^2 - 2a(c + d)}}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} = \frac{(3a^2 + 2a(c + d))(3a^2 - 2a(c + d))}{a^4} = \frac{5a^2 - 8cd}{a^2}.$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta = -1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} + -1 + \frac{1}{\cos^2 \beta} = -2 + \frac{5a^2 + 8cd}{a^2} + \frac{5a^2 - 8cd}{a^2} = 8.$$