

Problemes de Geometria 23

1.- L'altura d'un triangle rectangle sobre la hipotenusa és h . Demostreu que els vèrtexs dels angles aguts i les projeccions del peu de l'altura sobre els catets estan en una circumferència. Determineu la longitud de la corda de circumferència tallada per l'altura i els segments d'aquesta corda, en els quals la divideix la hipotenusa.
Shariguin I295.

2.- La raó entre el radi de la circumferència circumscrita i el radi de la inscrita a un trapezi és igual a k . Determineu l'angle agut del trapezi.
Gúsiev 188

3.- La corda comuna de dues circumferències secants és el diàmetre d'una d'elles. Per un dels extrems d'aquest diàmetre es tracen tangents a les dues circumferències. Demostreu que l'altre extrem del diàmetre i els punts migs dels segments de les tangents que tallen les circumferències són els vèrtexs d'un triangle rectangle.
Gúsiev 490.

4.- En una circumferència c donada, hi inscrivim un quadrilàter q , les diagonals del qual són perpendiculars.

QÜESTIÓ 1:

Proveu que, siga quin siga el quadrilàter inscrit de diagonals perpendiculars, la suma dels quadrats de dos costats oposats és un valor constant.

QÜESTIÓ 2:

Interpreteu geomètricament el valor d'aquesta constant.

Xtec gener 2009

5.- Siga $ABCD$ un tetràedre amb tres arestes perpendiculars dos a dos en el vèrtex D . Siga O el centre de la seua esfera circumscrita. Proveu que el baricentre T de la cara ABC pertany a la recta RO .

Duel Matemàtic R. Txeca, Polònia, Àustria, 2008.

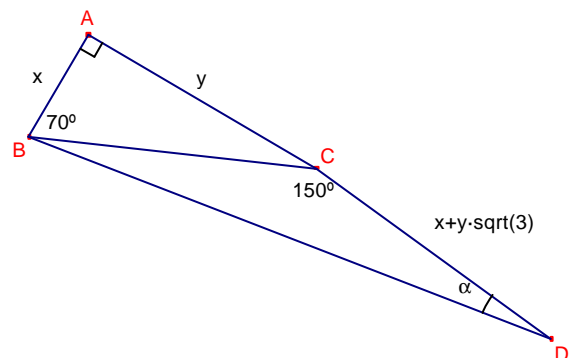
6.- L'ortocentre H d'un triangle acutangle $\triangle ABC$ es transforma en els punts A_1, B_1, C_1 amb les simetries axials els eixos de les quals són els costats a, b, c , respectivament. Si $\angle C_1AB_1 = \angle CA_1B$, $\angle A_1BC_1 = \angle AB_1C$, $\angle B_1CA_1 = \angle BC_1A$, proveu que el triangle és equilàter.

7.- En el sector d'una circumferència de radi R s'ha inscrit una circumferència de radi r .

La corda del sector mesura $2a$. Demostreu que $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}$.

Lidski 387.

8.- Donat el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$, $\overline{AB} = x$, $\overline{AC} = y$, es construeix el triangle $\triangle BCD$ tal que $\angle BCD = 150^\circ$, $\overline{CD} = x + \sqrt{3}y$. Calculeu la mesura de l'angle $\angle BDC$.



9.- Des d'un punt P exterior a una circumferència es tracen dues rectes que generen dues cordes \overline{AB} , \overline{CD} de longituds 10 i 7 unitats respectivament. Sabent que les dues rectes formen un angle de 60° i que la distància de P a B és de 8 unitats, calculeu el radi de la circumferència.

Oposicions València 2008

10.- Siga P un punt qualsevol de la circumferència C_1 inscrita a un quadrat de costat 2a. Anomenem α i β els angles respectius sota els quals el punt P veu cadascuna de les dues diagonals del quadrat.

Demostreu que, en variar el punt P sobre la circumferència c , la quantitat $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta$ es manté constant i trobeu el valor d'aquesta quantitat.

Xtec Juny de 2009.