

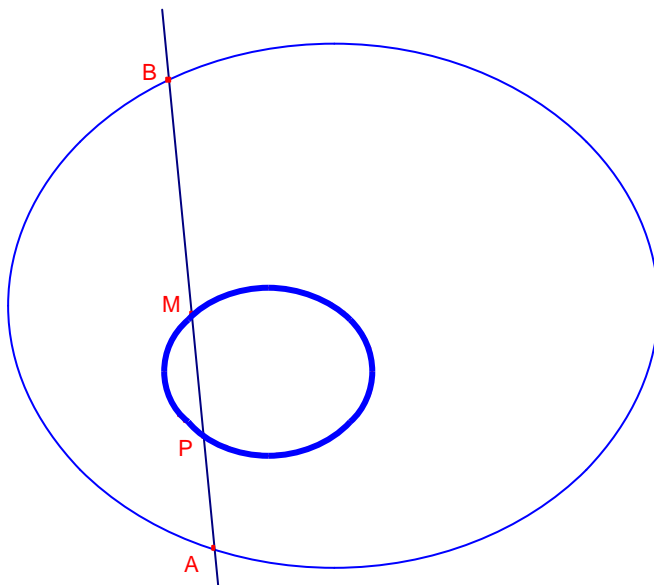
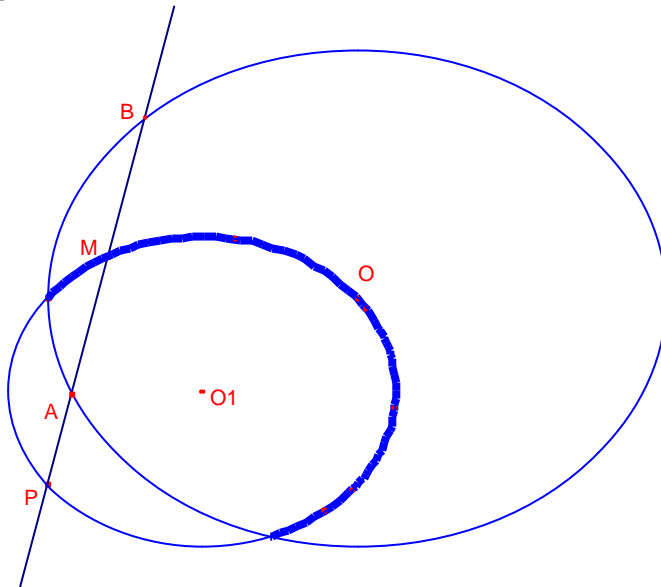
Problemes de Geometria 24

1.- Tenim una el·lipse ε i un punt P exterior a ella. Aleshores des de P tracem rectes secants i tangents a l'el·lipse les quals la tallen el els punts A i B.

Determineu el lloc geomètric dels punts M que són els punts mitjans dels segments \overline{AB} .

Xtec Juliol-agost de 2009

Solució.



Considerem l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Considerem el punt P de coordenades $P(c, d)$.

Siga la recta que passa pel punt P i té pendent m, la seua equació és:

$$y - d = m(x - c)$$

Considerem els punts d'intersecció de la recta i l'el·lipse solució del sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - d = m(x - c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-d + cm + \frac{b(bd + am\sqrt{a^2m^2 - c^2m^2 + b^2 - d^2 + 2cdm - bcm})}{a^2m^2 + b^2}}{m} \\ y = -\frac{b(bd + am\sqrt{a^2m^2 - c^2m^2 + b^2 - d^2 + 2cdm - bcm})}{a^2m^2 + b^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{-d + cm + \frac{b(-bd + am\sqrt{a^2m^2 - c^2m^2 + b^2 - d^2 + 2cdm + bcm})}{a^2m^2 + b^2}}{m} \\ y = -\frac{b(-bd + am\sqrt{a^2m^2 - c^2m^2 + b^2 - d^2 + 2cdm + bcm})}{a^2m^2 + b^2} \end{cases}$$

Les coordenades del punt mig M són:

$$M(x, y) = M\left(\frac{a^2m(-d + cm)}{a^2m^2 + b^2}, \frac{b^2(d - cm)}{a^2m^2 + b^2}\right)$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{a^2m(-d + cm)}{a^2m^2 + b^2} \\ y &= \frac{b^2(d - cm)}{a^2m^2 + b^2} \end{aligned}$$

Dividint les coordenades:

$$\frac{x}{y} = \frac{a^2m}{-b^2}. \text{ Aleshores, } m = \frac{-b^2x}{a^2y}.$$

$$y = \frac{b^2\left(d - c \frac{-b^2x}{a^2y}\right)}{a^2\left(\frac{-b^2x}{a^2y}\right)^2 + b^2} \quad y = \frac{a^2dy^2 + b^2cxy}{b^2x^2 + a^2y^2}$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2dy + b^2cx$$

$$\frac{\left(x - \frac{c}{2}\right)^2}{\frac{a^2d^2 + b^2c^2}{4b^2}} + \frac{\left(y - \frac{d}{2}\right)^2}{\frac{a^2d^2 + b^2c^2}{4a^2}} = 1.$$

Per tant el lloc geomètric és una el·lipse que té centre en el punt mig de P i el centre de l'el·lipse inicial, passa pel punt P, pel centre de l'elipse inicial. Té la mateixa excentricitat que l'elipse inicial.

Nota si el punt P pertany a l'interior de l'el·lipse (o de l'el·lipse) el lloc geomètric és tota l'el·lipse interior a la primera.

Si el punt P és exterior a l'el·lipse el lloc geomètric és el tros d'el·lipse interior a l'el·lipse inicial.

2.- En una circumferència de centre O siguin A, B de la circumferència tals que $\angle AOB = 120^\circ$.

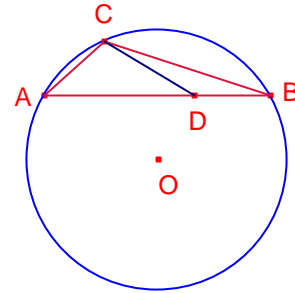
Siga C un punt de l'arc menor \widehat{AB} i D un punt de la corda \overline{AB} tal que $\overline{AD} = 2$, $\overline{BD} = 1$, $\overline{CD} = \sqrt{2}$.

Calculeu l'àrea del triangle $\triangle ABC$.
Olimpiada Argentina 2008

Solució:

Per ser angle inscrit en la circumferència $\angle ACB = 120^\circ$.

Siguin $x = \overline{AC}$, $y = \overline{BC}$, $\alpha = \angle ADC$.



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ADC$:

$$x^2 = 4 + 2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

$$x^2 = 6 - 4\sqrt{2} \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle DBC$:

$$y^2 = 1 + 2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \alpha \quad (3)$$

$$y^2 = 3 + 2\sqrt{2} \cdot \cos \alpha \quad (4)$$

$$2y^2 = 6 + 4\sqrt{2} \cdot \cos \alpha \quad (5)$$

Sumant les expressions (2) (5)

$$x^2 + 2y^2 = 12 \quad (6)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$:

$$9 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 120^\circ \quad (7)$$

$$x^2 + y^2 + xy = 9 \quad (8)$$

Considerem el sistema format per les expressions (6), (8)

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 12 \\ x^2 + y^2 + xy = 9 \end{cases} \text{ . Resolent el sistema:}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{(\sqrt{6} + 3)^3} - 5\sqrt{\sqrt{6} + 3} \\ y = \sqrt{\sqrt{6} + 3} \end{cases} \text{ .}$$

L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és:

$$S_{ABC} = \frac{xy \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ .}$$

3.- Siga el rectangle ABCD tal que $\overline{AD} = \overline{BC} = 156$, $\overline{AB} = \overline{CD} = 65$.

Dibuixem la circumferència de centre A que passa pel punt C.

La recta que passa pels punts BD talla la circumferència anterior en els punts E, F.

Calculeu la distància entre els punts E, F.

Olimpíada Argentina 2007.

Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle ABC$:

$$r = \overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{156^2 + 65^2} = 169.$$

Siga $x = \overline{DE}$, $y = \overline{BF}$.

Aplicant la potència de D respecte de la circumferència:

$$\overline{DE} \cdot \overline{DF} = r^2 - \overline{AD}.$$

$$x(169 + y) = 169^2 - 156^2 \quad (1)$$

Aplicant la potència de B respecte de la circumferència:

$$\overline{BE} \cdot \overline{BF} = r^2 - \overline{AB}.$$

$$y(169 + x) = 169^2 - 65^2 \quad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions

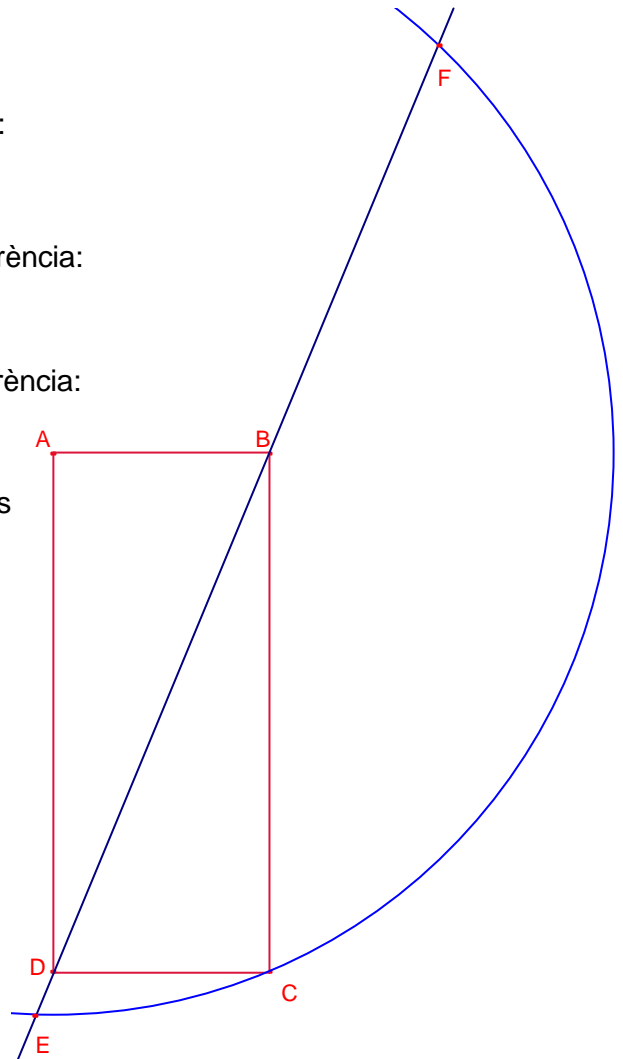
(1), (2):

$$\begin{cases} x(169 + y) = 169^2 - 156^2 \\ y(169 + x) = 169^2 - 65^2 \end{cases}$$

La solució del sistema és:

$$\begin{cases} x = \sqrt{24961} - 144 \\ y = \sqrt{24961} - 25 \end{cases}$$

$$\overline{EF} = x + y + \overline{BD} = 2\sqrt{24961} \approx 31.60.$$



4.- Donada una circumferència de centre O, es tracen quatre rectes tangents a la circumferència tal que aquestes quatre rectes determinen el trapezi ABCD, de bases \overline{AB} , \overline{CD} i de costats no paral·lels \overline{BC} i \overline{AD} .

Si $\overline{AO} = 2\sqrt{6}$, $\overline{BO} = 4\sqrt{3}$ i $\overline{CO} = 4$, calculeu les mesures dels costats i dels angles del trapezi.

Olimpiada Argentina 2003. Nacional, nivell 2.

Solució:

Per ser angles entre paral·leles:

$$C = 180^\circ - B, \quad D = 180^\circ - A.$$

Siguen E, F, G, H els punts de tangència de la circumferència i els costats \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} i \overline{AD} , respectivament.

Aleshores, $\overline{AE} = \overline{AH} = x$, $\overline{BE} = \overline{BF} = y$, $\overline{CF} = \overline{CG} = z$,
 $\overline{DG} = \overline{DH} = t$.

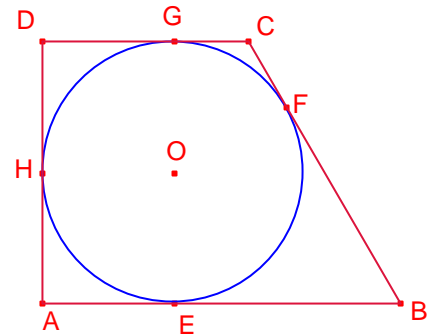
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles

$\triangle AEO$, $\triangle BEO$, $\triangle CFO$:

$$r^2 + x^2 = (2\sqrt{6})^2 \quad (1)$$

$$r^2 + y^2 = (4\sqrt{3})^2 \quad (2)$$

$$r^2 + z^2 = 4^2 \quad (3)$$



Els triangles rectangles $\triangle BEO$, $\triangle OFC$ són semblants (tenen els mateixos angles).

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{r}{y} = \frac{z}{r} \quad (4)$$

Considerem el sistema d'equacions lineals format per les expressions (1) (2) (3) (4):

$$\begin{cases} r^2 + x^2 = 24 \\ r^2 + y^2 = 48 \\ r^2 + z^2 = 16 \\ r^2 = yz \end{cases} \text{ . La solució del qual és: } \begin{cases} r = 2\sqrt{3} \\ x = 2\sqrt{3} \\ y = 6 \\ z = 2 \end{cases} .$$

Aplicant raons trigonomètriques als triangles rectangles $\triangle AEO$, $\triangle BEO$, $\triangle CFO$:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{x} = 1, \text{ aleshores, } A = 90^\circ .$$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ aleshores, } B = 60^\circ .$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{z} = \sqrt{3}, \text{ aleshores, } C = 120^\circ .$$

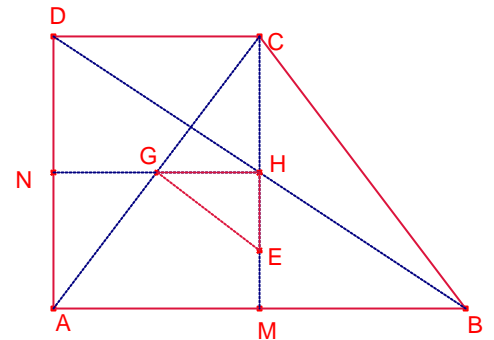
Aleshores, $D = 180^\circ - A = 90^\circ$.

Per tant, $\frac{D}{2} = 45^\circ$. Aleshores el triangle $\triangle DGO$ és rectangle i isòsceles, $t = r = 2\sqrt{3}$.

Aleshores, $\overline{AB} = x + y = 6 + \sqrt{2}$, $\overline{BC} = y + z = 8$, $\overline{CD} = z + t = 2 + 2\sqrt{3}$,

$\overline{AD} = x + t = 4\sqrt{3}$.

5.- Siga el trapezi ABCD de bases \overline{AB} , \overline{CD} i de costats no paral·lels \overline{BD} i \overline{AD} tal que $A = 90^\circ$, $\overline{AB} = 6$, $\overline{CD} = 3$ i $\overline{AD} = 4$. Siguen E, G, H els circumcentres dels triangles $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$, respectivament. Calculeu l'àrea del triangle EGH.
Olímpida Argentina 2003. Nivell 3.



Solució:

Siga M el punt mig del costat \overline{AB} . $\overline{AM} = \overline{BM} = 3$.

Notem que $\triangle CMB$ és rectangle $\angle CMB = 90^\circ$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ADC$:

$$\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AMB$:

$$\overline{BC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

El triangle $\triangle ABC$ és isòsceles ja que $\overline{AC} = \overline{BC} = 5$.

$\overline{AB}^2 < \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$, aleshores, el triangle $\triangle ABC$ és acutangle.

El circumcentre del triangle $\triangle ABC$ és interior al triangle i està sobre l'altura \overline{CM} .

En un triangle rectangle el circumcentre és el punt mig de la hipotenusa.

El circumcentre G del triangle rectangle $\triangle ACD$ està en el punt mig de la hipotenusa \overline{AC} . Aleshores pertany a la paral·lela mitjana del trapezi.

Siga N la projecció de G sobre el costat \overline{AD} .

$$\overline{GN} = \frac{1}{2} \overline{CD} = \frac{3}{2}.$$

El circumcentre H del triangle rectangle $\triangle ABD$ està en el punt mig de la hipotenusa \overline{BD} . Aleshores pertany a la paral·lela mitjana del trapezi.

Notem que H pertany al segment \overline{CM} . $\overline{HM} = \frac{1}{2} \overline{AD} = 2$.

$$\overline{HN} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 3.$$

Aleshores el triangle $\triangle EGH$ és rectangle, $\angle H = 90^\circ$. $\overline{GH} = \overline{HN} - \overline{GN} = \frac{3}{2}$.

Calculem el radi de la circumferència circumscripta al triangle $\triangle ABC$ utilitzant la fórmula de l'àrea:

$$S_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CM}}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}}{4R}.$$

$$\frac{6 \cdot 4}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 5}{4R}. \text{ Aleshores, } R = \overline{AE} = \frac{25}{8}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AME$:

$$\overline{EM} = \sqrt{\left(\frac{25}{8}\right)^2 - 3^2} = \frac{7}{8}. \quad \overline{HE} = \overline{HM} - \overline{EM} = 2 - \frac{7}{8} = \frac{11}{8}.$$

Aleshores l'àrea del triangle $\triangle EGH$: $S_{EGH} = \frac{\overline{GH} \cdot \overline{HE}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{11}{8}}{2} = \frac{33}{32}$.

6.- Dues rectes es tallen perpendicularment en un punt interior a una circumferència, determinant quatre triangles rectangles amb les hipotenuses inscrites en la circumferència. Demostreu que l'altura sobre la hipotenusa de cada triangle és una mitjana del triangle oposat pel vèrtex.

UPC - Examen parcial de Geometria. 2004.

Solució:

Siguen les rectes perpendiculars r i s que es tallen en el punt A , que es tallen la circumferència en els punts B, C, B', C' .

Siga AH la recta altura sobre el triangle rectangle $\triangle ABC$.

La recta altura talla la hipotenusa $\overline{B'C'}$ del triangle

$\triangle AB'C'$ en el punt M .

Hem de demostrar que M és el punt mig de la hipotenusa $\overline{B'C'}$.

Siga $\alpha = \angle HAC$.

Aleshores, $\angle HAB = 90^\circ - \alpha$.

Per tant, l'angle $\angle BAC = \alpha$.

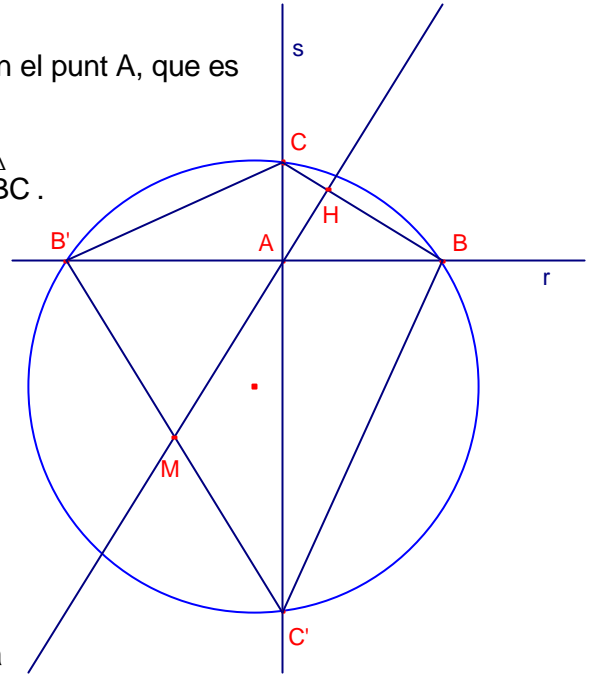
$\angle MAC' = \alpha$ per ser oposat pel vèrtex a l'angle $\alpha = \angle HAC$.

$\angle B'C'C = \angle B'BC = \alpha$, per ser angles inscrits en una circumferència i abraçar el mateix arc.

Aleshores, el triangle $\triangle AMC'$ és isòsceles i $\overline{MC'} = \overline{MA}$.

Anàlogament el triangle $\triangle AMB'$ és isòsceles i $\overline{MB'} = \overline{MA}$.

Per tant, $\overline{MB'} = \overline{MC'}$, aleshores, M és el punt mig del segment $\overline{B'C'}$, és a dir, \overline{AM} és mitjana del triangle $\triangle AB'C'$ oposat pel vèrtex del triangle $\triangle ABC$.



7.- Siga $\triangle ABC$ un triangle acutangle. Es dibuixen tres circumferències de diàmetres les altures. En cada una d'elles es traça la corda perpendicular pel ortocentre a l'altura corresponent. Demostreu que les tres cordes obtingudes tenen la mateixa longitud.

Solució:

Siga H l'ortocentre del triangle $\triangle ABC$.

Siga la circumferència de diàmetre l'altura \overline{AD}

Siga la recta perpendicular al diàmetre \overline{AD} que passa per H que talla la circumferència anterior en els punts P, Q .

Notem que $\overline{PH} = \overline{QH} = m$.

Aplicant la potència del punt H respecte a aquesta circumferència:

$$\overline{PH} \cdot \overline{QH} = \overline{AH} \cdot \overline{DH}.$$

$$m^2 = \overline{AH} \cdot \overline{DH}.$$

Siga la circumferència de diàmetre l'altura \overline{CF}

Siga la recta perpendicular al diàmetre \overline{CF} que passa per H que talla la circumferència anterior en els punts M, N .

Notem que $\overline{MH} = \overline{NH} = n$.

Aplicant la potència del punt H respecte a aquesta circumferència:

$$\overline{MH} \cdot \overline{NH} = \overline{CH} \cdot \overline{FH}.$$

$$n^2 = \overline{CH} \cdot \overline{FH}.$$

Volem demostrar que $m = n$.

Seria suficient demostrar que $\overline{AH} \cdot \overline{DH} = \overline{CH} \cdot \overline{FH}$.

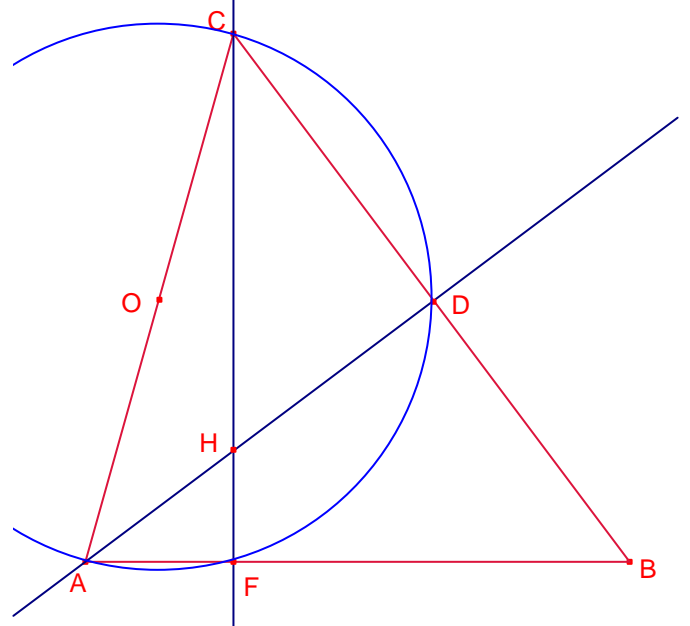
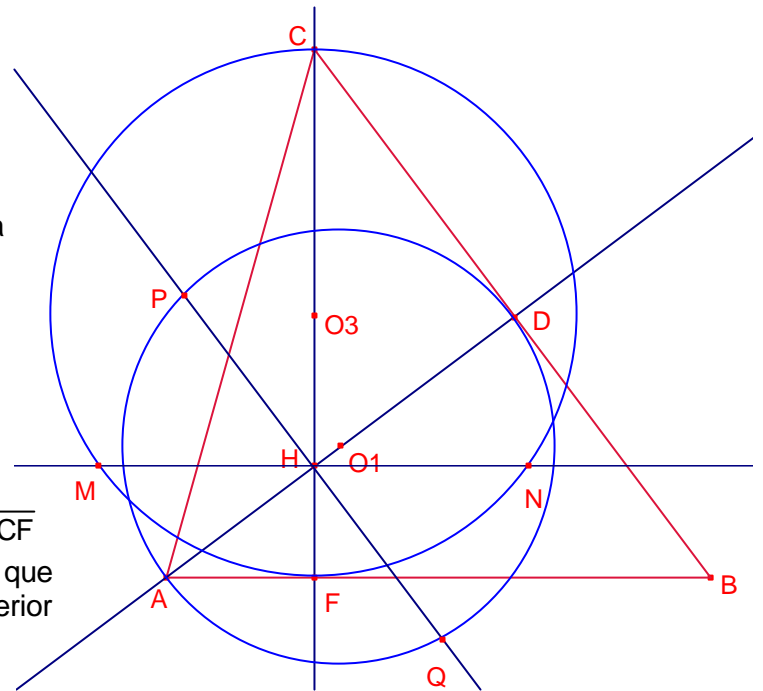
Considerem la circumferència de diàmetre \overline{AC} .

Notem que els punts D i F pertanyen a la circumferència ja que $\angle ADC = \angle AFC = 90^\circ$.

Aplicant la potència de H respecte d'aquesta circumferència:

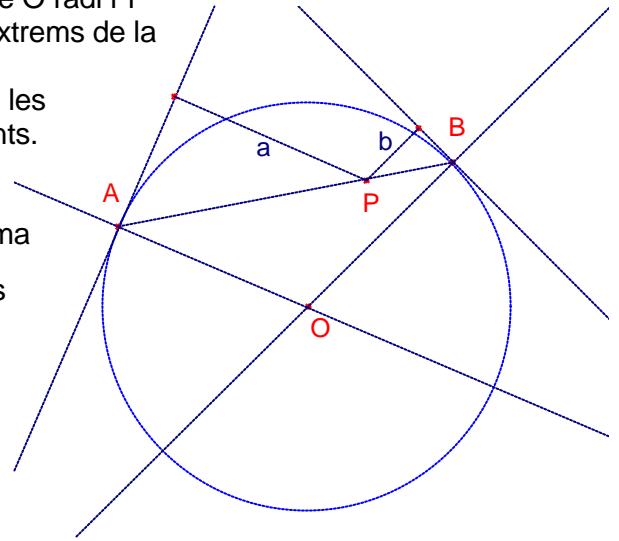
$$\overline{AH} \cdot \overline{DH} = \overline{CH} \cdot \overline{FH}.$$

Amb la tercera circumferència del problema obtindríem el mateix resultat.



8.-

Prenem un punt P interior a la circumferència de centre O radi r i considerem una corda variable que passe per P, els extrems de la qual anomenem A i B. Ara tracem les tangents a la circumferència que passen per A i B i anomenem a i b les distàncies de P a cadascuna d'aquestes rectes tangents.



Qüestió 1:

Trobeu el lloc geomètric dels punts P pels quals la suma $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ és igual a una constant, $\frac{1}{k}$, per totes les cordes que passen per P.

Qüestió 2:

Trobeu entre quins valors pot estar la constant k per assegurar-nos l'existència del lloc geomètric que proposa la qüestió 1.

Solució:

Qüestió 1:

Suposem resolt el problema. Vegem la condició que ha d'acomplir el punt P.

Totes les cordes que passen per P han d'acomplir que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{k} \text{ on } k \text{ és constant.}$$

En particular la corda que passa pel centre, $\overline{A'B'}$ ha d'acomplir la propietat.

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\overline{PA'}} + \frac{1}{\overline{PB'}} = \frac{\overline{PA'} + \overline{PB'}}{\overline{PA'} \cdot \overline{PB'}} \quad (1)$$

Aplicant la potència del punt P respecte de la circumferència.

$$\overline{PA'} \cdot \overline{PB'} = r^2 - \overline{OP}^2 \quad (2)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1)

$$\frac{1}{k} = \frac{\overline{PA'} + \overline{PB'}}{\overline{PA'} \cdot \overline{PB'}} = \frac{2r}{r^2 - \overline{OP}^2} \quad (3)$$

Aleshores, $\overline{OP}^2 = r^2 - 2kr$.

És a dir, P està sobre la circumferència de centre O i radi $\sqrt{r^2 - 2kr}$.

Vegem ara, que qualsevol punt P d'aquesta circumferència compleix la propietat (la suma

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ és igual a una constant, $\frac{1}{k}$, per totes les cordes que passen per P).

Siga una corda qualsevol \overline{AB} que passa pel punt P de

la circumferència de centre O i radi $\sqrt{r^2 - 2kr}$.

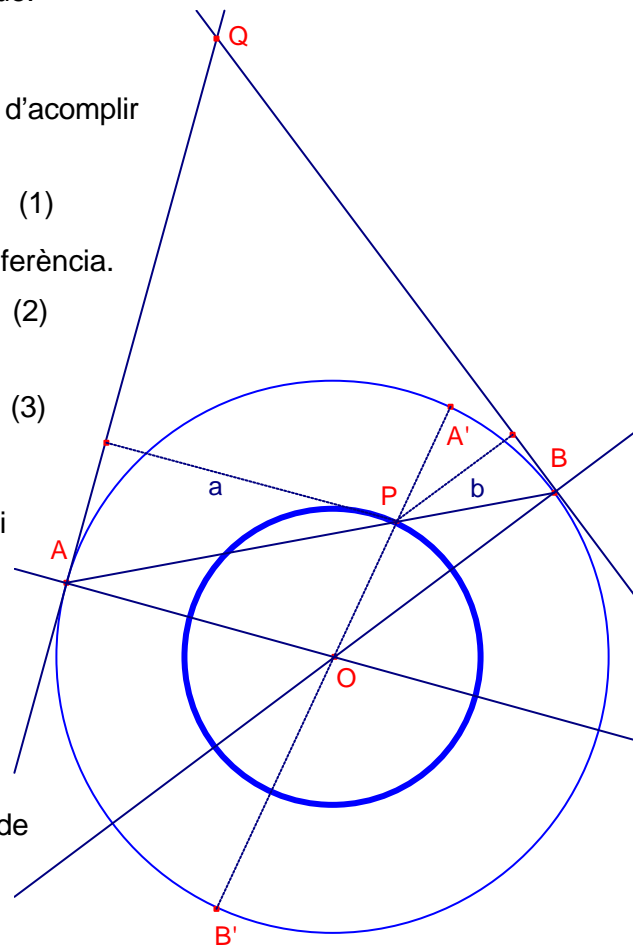
Siga Q el punt d'intersecció de les tangents a la circumferència que passen per A i B

Notem que $\alpha = \angle ABQ = \angle BAQ$.

Aleshores, $a = \overline{PA} \cdot \sin \alpha$, $b = \overline{PB} \cdot \sin \alpha$.

Aplicant la potència del punt P respecte de la circumferència:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = r^2 - \overline{OP}^2 = 2kr \quad (4)$$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AOB$:

$$\frac{\overline{PA} + \overline{PB}}{\sin 2\alpha} = \frac{r}{\sin(90^\circ - \alpha)}. \text{ Simplificant:}$$

$$\overline{PA} + \overline{PB} = 2r \cdot \sin \alpha \quad (5)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{(\overline{PA} + \overline{PB})\sin \alpha}{\overline{PA} \cdot \overline{PB} \cdot \sin^2 \alpha} \quad (6)$$

Substituint les expressions (4) i (5) en l'expressió (6):

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{(\overline{PA} + \overline{PB})\sin \alpha}{\overline{PA} \cdot \overline{PB} \cdot \sin^2 \alpha} = \frac{2r \cdot \sin^2 \alpha}{2kr \cdot \sin^2 \alpha}. \text{ Aleshores:}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{k}.$$

Questió 2:

El problema té solució quan $r^2 - 2kr \geq 0$.

És a dir quan $k \leq \frac{1}{2}r$.

9.- Anomenem triangle òrtic d'un triangle $\triangle ABC$ al triangle que s'obté quan hom uneix amb segments els peus de les seues altures

Qüestió:

L'àrea d'un triangle és igual al semiperímetre del seu triangle òrtic multiplicat pel radi del seu cercle circumscrit.

Solució:

Siga el triangle $\triangle ABC$ i H_a, H_b, H_c els peus de les altures.

Calculem $\overline{H_b H_c}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle AH_b H_c$:

$$\overline{H_b H_c}^2 = \overline{AH_b}^2 + \overline{AH_c}^2 - 2 \cdot \overline{AH_b} \cdot \overline{AH_c} \cdot \cos A.$$

Notem que $\overline{AH_b} = c \cdot \cos A$, $\overline{AH_c} = b \cdot \cos A$.

$$\overline{H_b H_c}^2 = c^2 \cdot \cos^2 A + b^2 \cdot \cos^2 A - 2 \cdot bc \cdot \cos^3 A$$

$$\overline{H_b H_c}^2 = \cos^2 A (a^2 + b^2 - 2 \cdot bc \cdot \cos A)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

$$\overline{H_b H_c}^2 = a^2 \cos^2 A. \text{ Anàlogament, } \overline{H_a H_c}^2 = b^2 \cos^2 B, \overline{H_a H_b}^2 = c^2 \cos^2 C.$$

Vegem que si el triangle $\triangle ABC$ és acutangle o rectangle la fórmula és vàlida.

Si $\triangle ABC$ és acutangle, $\overline{H_b H_c} = a \cdot \cos A$, $\overline{H_a H_c} = b \cdot \cos B$, $\overline{H_a H_b} = c \cdot \cos C$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\overline{H_b H_c} + \overline{H_a H_c} + \overline{H_a H_b})R &= \frac{1}{2} \left(a \cdot \cos A \cdot \frac{a}{2 \sin A} + b \cdot \cos B \cdot \frac{b}{2 \sin B} + c \cdot \cos C \cdot \frac{c}{2 \sin C} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(a^2 \cdot \cos A \cdot \frac{1}{\sin A} + a \cdot \cos B \cdot \frac{b}{\sin A} + a \cdot \cos C \cdot \frac{c}{\sin A} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \frac{a}{\sin A} (a \cdot \cos A + b \cdot \cos B + c \cdot \cos C) = \\ &= \frac{1}{4} \frac{a}{\sin A} \left(a \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + b \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + c \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) = \\ &= \frac{1}{8} \frac{1}{bc \cdot \sin A} (2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4). \end{aligned}$$

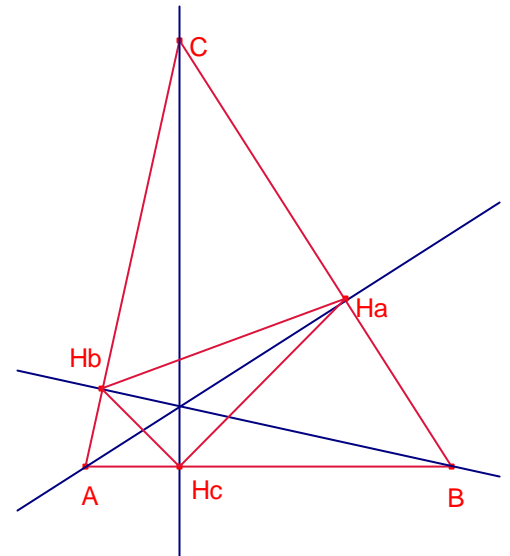
$$\text{L'àrea d'un triangle és } S_{ABC} = \frac{bc \cdot \sin A}{2} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}.$$

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

Aleshores,

$$\frac{1}{2}(\overline{H_b H_c} + \overline{H_a H_c} + \overline{H_a H_b})R = \frac{1}{8} \frac{1}{S_{ABC}} (4 \cdot S_{ABC})^2 = S_{ABC}.$$

Si el triangle és obtusangle la propietat no es compleix.



10.- En un triangle qualsevol $\triangle ABC$ proveu que $\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} = 4$.

Solució:

$$\begin{aligned}\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 2 \sin(A + B) \cdot \cos(A - B) + 2 \sin C \cdot \cos C = \\ &= 2 \sin C \cdot \cos(A - B) + 2 \sin C \cdot \cos C = \\ &= 2 \sin C (\cos(A - B) + \cos C) = \\ &= 2 \sin C \left(2 \cos \frac{A - B + C}{2} \cdot \cos \frac{A - B - C}{2} \right) = \\ &= 4 \sin C \cdot \cos(90^\circ - B) \cdot \cos(A - 90^\circ) = \\ &= 4 \sin C \cdot \sin B \cdot \sin A.\end{aligned}$$

Aleshores, $\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} = 4$.