Problemes de Geometria 24

1.- Tenim una el·lipse ε i un punt P exterior a ella. Aleshores des de P tracem rectes secants i tangents a l'el·lipse les quals la tallen el els punts A i B.
Determineu el lloc geomètric dels punts M que són els punts mitjans dels segments $\overline{AB}$.
Xtec Juliol-agost de 2009

2.- En una circumferència de centre O siguen A, B de la circumferència tals que $\angle AOB = 120^{o}$.

Siga C un punt de l'arc menor $\overset{\frown}{AB}$ i D un punt de la corda $\overline{AB}$ tal que $\overline{AD} = 2$, $\overline{BD} = 1$, $\overline{CD} = \sqrt{2}$.

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Olimpiada Argentina 2008

3.- Siga el rectangle ABCD tal que $\overline{AD} = \overline{BC} = 156$, $\overline{AB} = \overline{CD} = 65$.
Dibuixem la circumferència de centre A que passa pel punt C.
La recta que passa pels punts BD talla la circumferència anterior en els punts E, F.
Calculeu la distància entre els punts E, F.
Olimpíada Argentina 2007.

4.- Donada una circumferència de centro O, es tracen quatre rectes tangents a la circumferència tal que aquestes quatre rectes determinen el trapezi ABCD, de bases $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ i de costats no paral·lels $\overline{BD}$ i $\overline{AD}$.
Si $\overline{AO} = 2\sqrt{6}$, $\overline{BO} = 4\sqrt{3}$ i $\overline{CO} = 4$, calculeu les mesures dels costats i dels angles del trapezi.
Olimpíada Argentina 2003. Nacional, nivell 2.

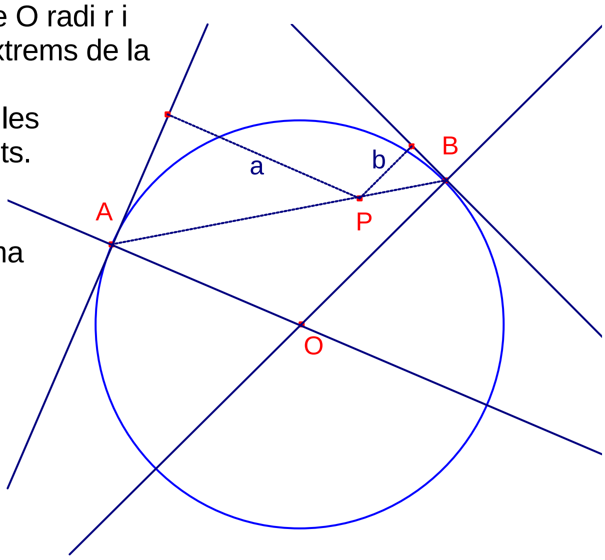
5.- Siga el trapezi ABCD de bases $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ i de costats no paral·lels $\overline{BD}$ i $\overline{AD}$ tal que $A = 90^{o}$, $\overline{AB} = 6$, $\overline{CD} = 3$ i $\overline{AD} = 4$. Siguen E G, H els circumcentres dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ACD}$, $\overset{\Delta}{ABD}$, respectivament. Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EGH}$.
Olímpíada Argentina 2003. Nivell 3.

6.- Dues rectes es tallen perpendicularment en un punt interior a una circumferència, determinant quatre triangles rectangles amb les hipotenuses inscrites en la circumferència. Demostreu que l'altura sobre la hipotenusa de cada triangle és una mitjana del triangle oposat pel vèrtex.
UPC - Examen parcial de Geometria. 2004.

7.- Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle acutangle. Es dibuixen tres circumferències de diàmetres les altures. En cada una d'elles es traça la corda perpendicular pel ortocentre a l'altura corresponent. Demostreu que les tres cordes obtingudes tenen la mateixa longitud.

8.-

Prenem un punt P interior a la circumferència de centre O radi r i considerem una corda variable que passe per P, els extrems de la qual anomenem A i B. Ara tracem les tangents a la circumferència que passen per A i B i anomenem a i b les distàncies de P a cadascuna d'aquestes rectes tangents.



Qüestió 1:
Trobeu el lloc geomètric dels punts P pels quals la suma $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ és igual a una constant, $\frac{1}{k}$, per totes les cordes que passen per P.

Qüestió 2:
Trobeu entre quins valors pot estar la constant k per assegurar-nos l'existència del lloc geomètric que proposa la qüestió 1.

Xtec 2009 octubre.

9.- Anomenem triangle òrtic d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ al triangle que s'obté quan hom uneix amb segments els peus de les seues altures

Qüestió:
L'àrea d'un triangle és igual al semiperímetre del seu triangle òrtic multiplicat pel radi del seu cercle circumscrit.

Xtec 2009 desembre.

10.- En un triangle qualsevol $\overset{\Delta}{ABC}$ proveu que $\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} = 4$.