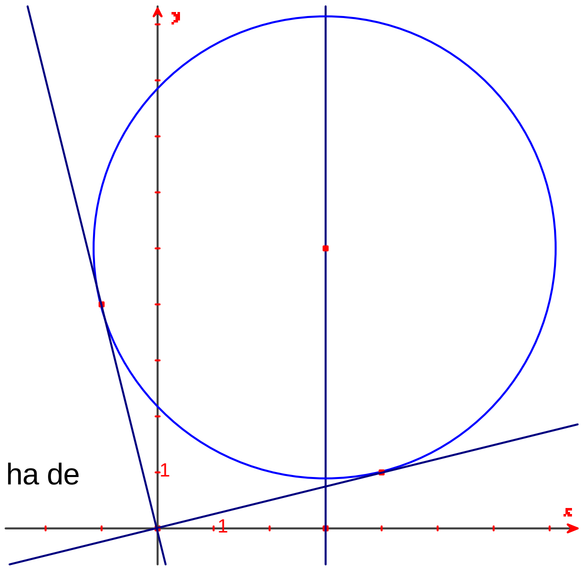
Problemes de Geometria 25

1.- Donada la circumferència $x^2-6x+y^2-2py+17=0$. Determineu els valors de p a fi que les dues rectes tangents a la circumferència traçades des de l'origen de coordenades siguen perpendiculars.



Solució:
Les rectes tangents tenen equacions:

$y=mx$ i $y=\frac{-1}{m}x$, suposem que $m\neq 0$.

El sistema format per la circumferència i la primera recta tangent té solució única:

$$\begin{cases} x^2-6x+y^2-2py+17=0 \\ y=mx \end{cases}$$

$x^2-6x+m^2x^2-2pmx+17=0$.

$(1+m^2)x^2-(6-2pm)x+17=0$.

Per tindre solució única el discriminant de l'equació ha de ser zero:

$(6-2pm)^2-4(1+m^2)17=0$. Simplificant:

$p^2m^2+6pm-8-17m^2=0$ (1)

El sistema format per la circumferència i la segona recta tangent té solució única:

$$\begin{cases} x^2-6x+y^2-2py+17=0 \\ y=\frac{-1}{m}x \end{cases}$$

$x^2-6x+\left(\frac{-1}{m}\right)^2x^2-2p\left(\frac{-1}{m}\right)x+17=0$.

$\left(1+\frac{1}{m^2}\right)x^2-\left(6+2\frac{p}{m}\right)x+17=0$.

$(1+m^2)x^2-(6m^2-2pm)x+17m^2=0$.

Per tindre solució única el discriminant de l'equació ha de ser zero:

$(6m^2-2pm)^2-4(1+m^2)17m^2=0$. Simplificant:

$-8m^2-6pm+p^2-17=0$ (2)

Sumant les expressions (1), (2):

$-25m^2+p^2q^2+p^2-25=0$. Factoritzant l'equació:

$(p^2-25)(m^2+1)=0$.

Aleshores, $p=5, p=-5$.

Si $m=0$, la recta tangent seria $y=0$.

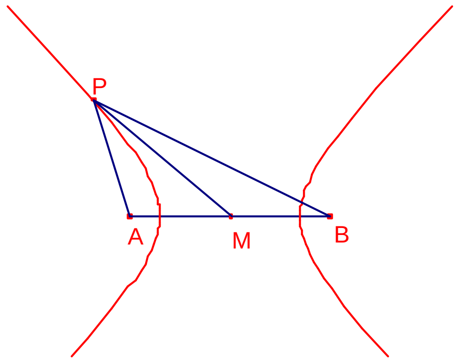
Aleshores, l'altra recta tangent seria $x=0$.

En aquest cas el radi de la circumferència seria $r=3$ i l'equació seria

$(x-3)^2+(y-3)^2=3^2$.

En aquest cas $p=3$, però $x^2-6x+y^2-6y+17=0$. Aquesta no és l'equació anterior.

2.- Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$. Estudieu el lloc geomètric dels punts P del plànol tals que $\overline{PM}$ és mitjana proporcional dels segments $\overline{PA}$ i $\overline{PB}$.



Solució 1:
Siga $2a = \overline{AB}$ la longitud del segment.
$\overline{AM} = \overline{BM} = a$.

Siga P un punt del lloc geomètric.
$\overline{PM}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$.

$$\left(\overline{PA} - \overline{PB}\right)^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 - 2 \cdot \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 - 2 \cdot \overline{PM}^2 \qquad (1)$$

Siga $\alpha = \angle AMP$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AMP}$:
$$\overline{PA}^2 = a^2 + \overline{PM}^2 - 2a \cdot \overline{PM} \cdot \cos\alpha \qquad (2)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BMP}$:
$$\overline{PB}^2 = a^2 + \overline{PM}^2 + 2a \cdot \overline{PM} \cdot \cos\alpha \qquad (3)$$

Sumant les expressions (2) (3):
$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2a^2 + 2 \cdot \overline{PM}^2 \qquad (4)$$

Substituint l'expressió (4) en l'expressió (1):
$$\left(\overline{PA} - \overline{PB}\right)^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 - 2 \cdot \overline{PM}^2 = 2a^2$$
$$\left|\overline{PA} - \overline{PB}\right| = a\sqrt{2}.$$

Aleshores, el lloc geomètric és una hipèrbola de focus A i B i eix major $a\sqrt{2}$, essent 2a la distància focal.

Solució 2:
Considerem el segment i el punt mig M en les següents coordenades:
$M(0,0)$, $A(-a,0)$, $B(a,0)$. Siga $P(x,y)$ un punt del lloc geomètric.

$\overline{PM}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$.

$x^2 + y^2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$.

Elevant al quadrat i simplificant:

$-2a^2x^2 + 2a^2y^2 + a^4 = 0$. Simplificant:

$-2x^2 + 2y^2 + a^2 = 0$.

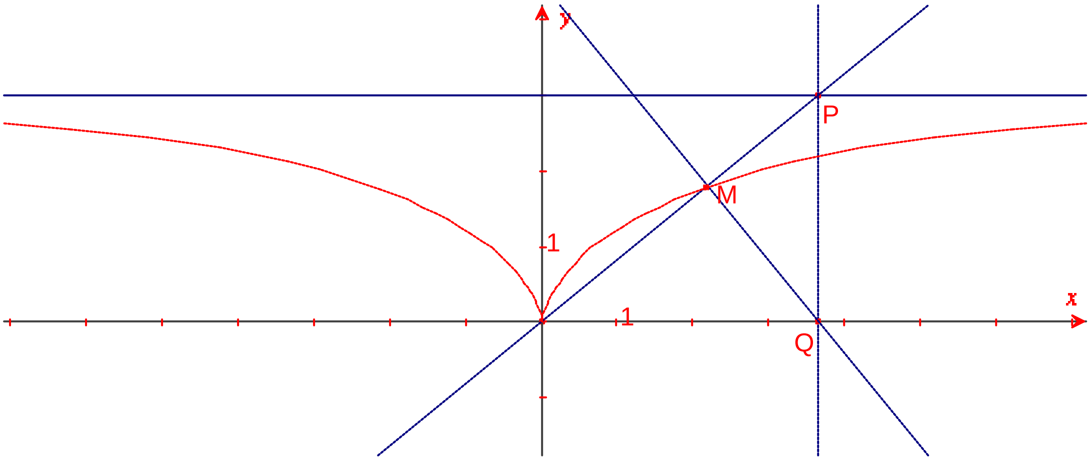
$$x^2 - y^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

Aquesta equació és l'equació d'una hipèrbola de centre M(0,0), semieix major $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, semieix menor $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ i de focus $F(a,0)$, $F'(-a,0)$.

3.- Siga donada la recta $y = a$ i un punt P de la recta.
Siga Q la projecció de P sobre l'eix d'abscisses i M la projecció de Q sobre la recta que passa per l'origen de coordenades i el punt P.
Determineu el lloc geomètric del punt M al varia P sobre la recta $y = a$.

Solució:



Siga $O(0,0)$ l'origen de coordenades.
Siga $P(b,a)$ un punt qualsevol sobre la recta $y = a$.
La projecció de P sobre l'eix d'abscisses té coordenades $Q(b,0)$.
La recta que passa pels punts O, P té equació:

$$r \equiv y = \frac{a}{b}x.$$

La recta perpendicular a la recta r que passa pel punt Q té equació:

$$s \equiv y = \frac{-b}{a}(x-b).$$

El punt M projecció de Q sobre la recta r és la intersecció de les rectes r, s:

$$\begin{cases} y = \dfrac{a}{b}x \\ y = \dfrac{-b}{a}(x-b) \end{cases}, \text{ la solució del qual és, } \begin{cases} x = \dfrac{b^3}{a^2+b^2} \\ y = \dfrac{ab^2}{a^2+b^2} \end{cases}.$$

Dividint les dues equacions:

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a}. \quad b = \frac{x}{y}a.$$

Aleshores:

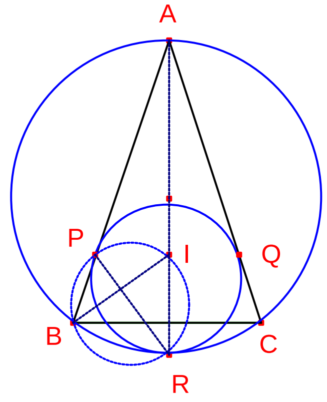
$$y = \frac{a\left(\frac{x}{y}a\right)^2}{a^2 + \left(\frac{x}{y}a\right)^2}. \text{ Simplificant: } y = \frac{ax^2}{x^2+y^2}.$$

$$x^2y + y^3 - ax^2 = 0.$$

És la cissoide de Diocles.

4.- Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle isòsceles de costat desigual $\overline{BC}$. Una circumferència és tangent interior a la circumferència circumscrita al triangle i als costats $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ en els punts P i Q, respectivament. Demostreu que el punt mig del segment $\overline{PQ}$ és l'incentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Olimpíada Catalunya 2007.



Solució 1:

Siga R el punt d'intersecció de circumferència circumscrita al triangle i la mediatriu al costat $\overline{BC}$.

$\overline{AR}$ és diàmetre de la circumferència circumscrita al triangle, per tant:

$\angle ABR = 90^o$.

Siga C_1 la circumferència que és tangent interior a la circumferència circumscrita al triangle i als costats $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ en els punts P i Q, respectivament.

Siga I el punt mig del segment $\overline{PQ}$.

Notem que el quadrilàter PBRI és inscriptible en una circumferència ja que els angles oposats són suplementaris $\angle PIR = \angle PBR = 90^o$.

Siga C_2 la circumferència circumscrita al quadrilàter PBRI.

Siga $\alpha = \angle PBI$.

$\angle PRI = \angle PBI = \alpha$ per ser inscrits i abraçar el mateix arc de la circumferència C_2.

Per ser els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PIR}$, $\overset{\Delta}{QIR}$ iguals $\angle PQR = 90^o - \alpha$.

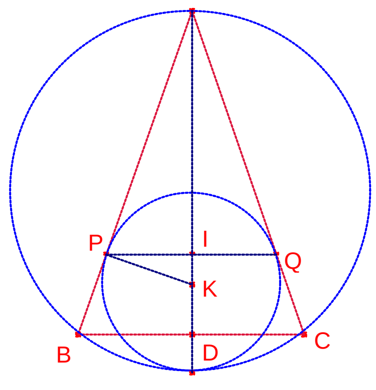
$\angle PRQ = 2\alpha$

Per ser $\angle PAQ$ exterior a la circumferència C_1

$\angle PAQ = 180^o - 4\alpha$.

Aleshores, $\angle ABC = \dfrac{180^o - (180^o - 4\alpha)}{2} = 2\alpha$.

Aleshores, $\overline{BI}$ és bisectriu del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



Solució 2:

Siga $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AB} = \overline{AC}$. Siga I el punt mig del segment $\overline{PQ}$.

Siga D el punt mig del costat $\overline{BC}$.

L'altura del triangle sobre el costat desigual és: $\overline{AD} = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{a\sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}}}{2} = r\frac{2b + a}{2} = \frac{ab^2}{4R},$$ on r és el radi de la circumferència inscrita i R el radi de la circumferència circumscrita.

Aleshores, $r = \dfrac{a}{2(2b + a)}\sqrt{4b^2 - a^2}$, $R = \dfrac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$.

Siga K el centre de la circumferència tangent i als costats $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ i tangent a la circumferència circumscrita al triangle. Siga $s = \overline{KP}$ el seu radi.

Els triangles $\overset{\Delta}{APK}$, $\overset{\Delta}{ADB}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{s}{2R-s}=\frac{a}{2b}$. Aleshores:

$s=\frac{2aR}{2b+a}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APK}$:

$$\overline{AP}^2=(2R-s)^2-s^2=4R^2-4Rs=4R^2\left(\frac{2b-a}{2b+a}\right).$$

Els triangles $\overset{\Delta}{APK}$, $\overset{\Delta}{AIP}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{AP}}{2R-s}.$$

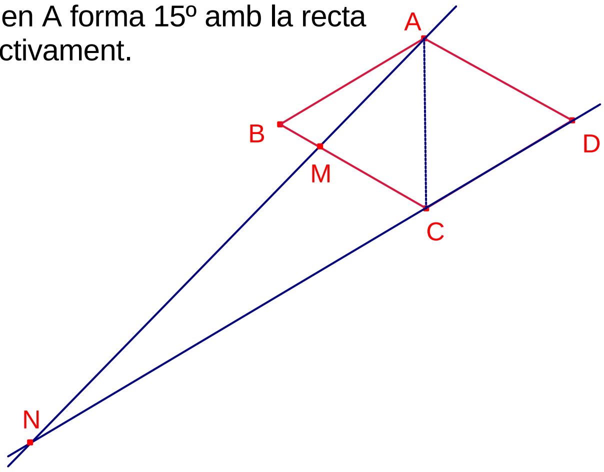
$$\overline{AI}=\frac{\overline{AP}^2}{2R-s}=\frac{4R^2\left(\frac{2b-a}{2b+a}\right)}{2R\left(1-\frac{2a}{2b+a}\right)}=R\left(\frac{2b-a}{b}\right).$$

$$\overline{ID}=\overline{AD}-\overline{AI}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}-R\left(\frac{2b-a}{b}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}-\frac{b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}\frac{2b-a}{b}=$$

$$=\sqrt{4b^2-a^2}\,\frac{a}{2(2b+a)}=r.$$

Aleshores, I és l'incentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

5.- Siga el rombe ABCD, A=120º. La semirecta d'origen A forma 15º amb la recta AB i talla les rectes BC i CD en els punts M i N respectivament.



Proveu que $\frac{3}{\overline{AM}^2}+\frac{3}{\overline{AN}^2}=\frac{4}{\overline{AB}^2}$.

Mathscope 266.2

Solució:

Els costats del rombe són tots iguals.

Notem que $\angle AMC=75º$, $\angle ANC=15º$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

$\frac{\overline{AM}}{\sin 60º}=\frac{\overline{AB}}{\sin 75º}$, aleshores,

$\frac{1}{\overline{AM}^2}=\frac{\sin^2 75º}{\sin^2 60º}\frac{1}{\overline{AB}^2}$.

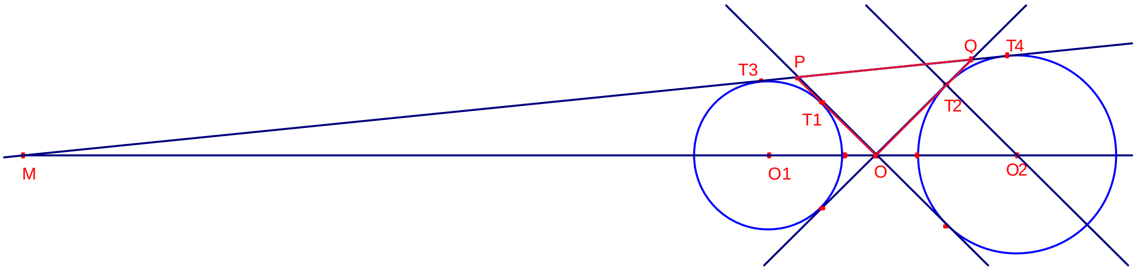
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ANC}$:

$\frac{\overline{AN}}{\sin 120º}=\frac{\overline{AB}}{\sin 15º}$, aleshores, $\frac{1}{\overline{AN}^2}=\frac{\cos^2 75º}{\sin^2 60º}\frac{1}{\overline{AB}^2}$.

$\frac{3}{\overline{AM}^2}+\frac{3}{\overline{AN}^2}=3\frac{\sin^2 75º+\cos^2 75º}{\sin^2 60º}\frac{1}{\overline{AB}^2}=\frac{4}{\overline{AB}^2}$.

6.- Dues circumferències de radis 6, i 8 tenen les tangents interiors perpendiculars. Determineu l'àrea del triangle format per les tangents interiors i una de les tangents exteriors.

Solució.



Siga la circumferència de centre O_1 i radi 6.
Siga la circumferència de centre O_2 i radi 8.
Siga O el punt d'intersecció de les dues rectes tangents interiors.
Siga T_1 un dels punts de tangència amb la primera circumferència, siga T_2 un dels punts de tangència amb la segona circumferència.
Si les tangents interiors són perpendiculars, aleshores,

$\angle T_1OO_1 = \frac{90^o}{2} = 45^o$, $\angle T_2OO_2 = \frac{90^o}{2} = 45^o$.

Aleshores, $\overline{OO_1} = 6\sqrt{2}$, $\overline{OO_2} = 8\sqrt{2}$.

Siga α l'angle que forma la recta tangent exterior a la circumferència i la recta O_1O_2 i M el punt intersecció d'ambdues rectes.

Siga $x = \overline{MO_1}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MO_1T_3}$, $\overset{\Delta}{MO_2T_4}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{6}{z} = \frac{8}{z + 14\sqrt{2}}$. Resolent l'equació:

$z = 42\sqrt{2}$.

Aleshores, $\sin\alpha = \frac{6}{42\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{14}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{194}}{14}$.

Siga $\overset{\Delta}{OPQ}$ el triangle rectangle format per les dues tangents interiors i una de les tangents exteriors:

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{MOQ}$:

$\frac{\overline{OQ}}{\sin\alpha} = \frac{42\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{\sin(\alpha + 45^o)}$, $\overline{OQ} = \sqrt{97} - 1$.

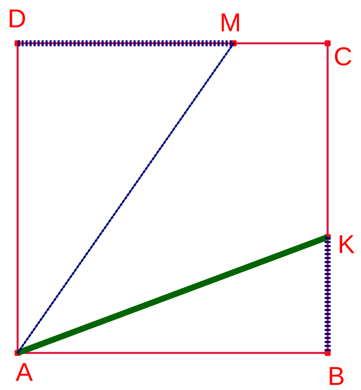
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{MOP}$:

$\frac{\overline{OP}}{\sin\alpha} = \frac{42\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{\sin(\alpha + 135^o)}$, $\overline{OP} = \sqrt{97} + 1$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és:

$$S_{OPQ} = \frac{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}}{2} = \frac{\left(\sqrt{97} + 1\right)\left(\sqrt{97} - 1\right)}{2} = 48 .$$

7.- Donat el quadrat ABCD i un punt K qualsevol del costat $\overline{BC}$. La bisectriu de l'angle $\angle DAK$ talla el costat $\overline{CD}$ en el punt M.
Proveu que $\overline{AK} = \overline{DM} + \overline{BK}$.



Solució:
Siga $a = \overline{AB}$ costat del quadrat.
Siga $\alpha = \angle KAB$. Aleshores, $\angle DAK = 90º - \alpha$.
Per tant, $\angle DAM = \angle MAK = 45º - \dfrac{\alpha}{2}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADM}$:

$$\frac{\overline{DM}}{a} = tg\left(45º - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg\frac{\alpha}{2}} \qquad (1)$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABK}$:

$$\frac{\overline{BK}}{a} = tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}} \qquad (2)$$

Sumant les expressions (1), (2):

$$\frac{\overline{DM}}{a} + \frac{\overline{BK}}{a} = \frac{1 - tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg\frac{\alpha}{2}} + \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 + tg^2\frac{\alpha}{2} - 2tg\frac{\alpha}{2} + 2tg\frac{\alpha}{2}}{\left(1 + tg\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - tg\frac{\alpha}{2}\right)} =$$

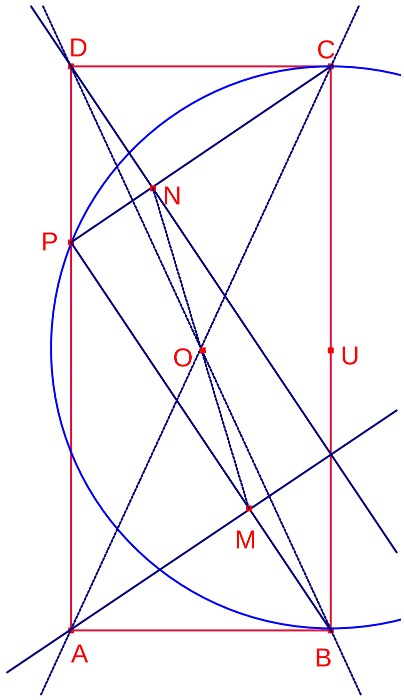
$$= \frac{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{1 - \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\frac{a}{\overline{AK}}} = \frac{\overline{AK}}{a}.$$

Per tant, $\overline{AK} = \overline{DM} + \overline{BK}$.

8.- Siga el rectangle ABCD i el punt P en el costat $\overline{AD}$ tal que $\angle BPC = 90º$.
La perpendicular a $\overline{BP}$ que passa per A talla $\overline{BP}$ en el punt M.
La perpendicular a $\overline{CP}$ que passa per D talla $\overline{CP}$ en el punt N.
Demostreu que el centre del rectangle està en el segment $\overline{MN}$.
Olimpiada de mayo. Argentina. 2008.

Solució:
El problema té solució (existeix P) si $\overline{BC} \geq 2 \cdot \overline{AB}$.

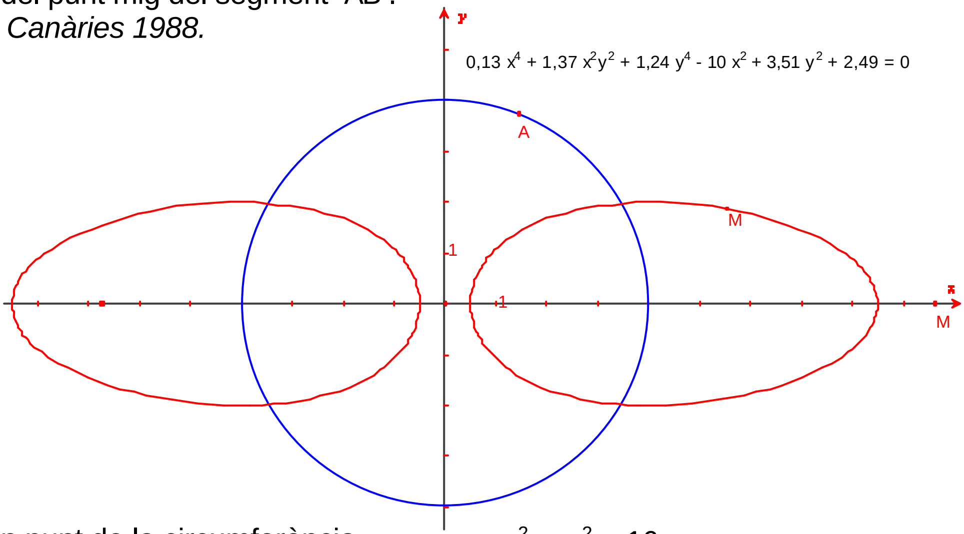


Notem que la recta DN és paral·lela a $\overline{BP}$.
La recta AM és paral·lela a $\overline{CP}$.

Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABM}$, $\overset{\Delta}{CDN}$ són iguals.
El punt D és simètric de B respecte del punt O
El punt C és simètric de A respecte de O.
Aleshores N és simètric de M respecte de O.
Per tant, O pertany al segment $\overline{MN}$, a més a més, és el punt mig del segment $\overline{MN}$.

9.- Un punt A es mou sobre una circumferència d'equació $x^2+y^2=16$ i altre punt B es mou sobre l'eix OX essent la distància entre els dos punts A i B de 9. Determineu el lloc geomètric del punt mig del segment $\overline{AB}$.
Oposicions de Canàries 1988.

Solució:



Siga $A(a,b)$ u n punt de la circumferència $x^2+y^2=16$.

$a^2+b^2=16$ (1)

Siga $B(c,0)$ un punt de l'eix OX tal que $\overline{AB}=9$.

$\sqrt{(c-a)^2+b^2}=81$.

$a^2+b^2+c^2-2ac=81$ (2)

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2):

$c^2-2ac=65$ (3)

$c=a\pm\sqrt{a^2-65}$ (4)

El punt mig M del segment $\overline{AB}$ té coordenades:

$M\left(\frac{a+c}{2},\frac{b}{2}\right)$. Siga $\begin{cases} x=\frac{a+c}{2} \\ y=\frac{b}{2} \end{cases}$.

Elevant al quadrat:

$4x^2=a^2+c^2+2ac$ (5)

$4y^2=b^2$ (6)

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (6):

$4y^2=16-a^2$ (7)

$a^2=4(4-y^2)$ (8)

$a=\pm2\sqrt{4-y^2}$ (9)

Substituint l'expressió (3) en l'expressió (5):

$4x^2=a^2+65+4ac$

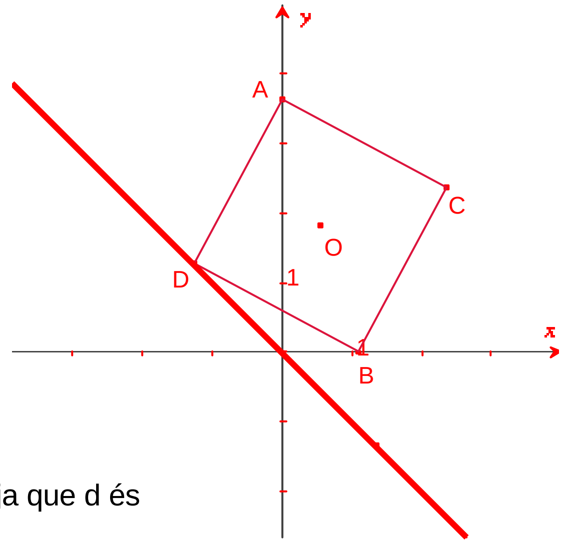
Substituint les expressions (4) (9)en l'expressió (5):

$$4x^2=\left(\pm2\sqrt{4-y^2}\right)^2+65\pm4\sqrt{4-y^2}\left(2\sqrt{4-y^2}\pm\sqrt{49-y^2}\right).$$

$$4x^2-81-4y^2=\pm4\sqrt{4-y^2}\left(2\sqrt{4-y^2}\pm\sqrt{49-y^2}\right).$$

10.- Siguen dos punts $A(a,0)$, $B(0,b)$ tal que $a+b=2d$ (d constant). Sobre el segment $\overline{AB}$ com diagonal es construeix un quadrat els vèrtexs del qual són C i D. Proveu que al variar A i B, un dels vèrtexs roman fix i determineu el lloc geomètric que descriu l'altre.

Oposicions de Madrid 1988.



Solució:

Siga O el centre del quadrat les seues coordenades són:

$O\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$

$\overrightarrow{OB}=\left(-\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$

$\overrightarrow{OC}$ és ortogonal i d'igual mòdul que $\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OC}=\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{OD}=\left(\frac{-b}{2},\frac{-a}{2}\right)$.

Aleshores les coordenades del punts C, D són:

$C\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2}\right)$, aleshores, $C(d,d)$ per tant és un punt fix ja que d és constant.

$D\left(\frac{a-b}{2},\frac{-a+b}{2}\right)$.

Siga $\begin{cases} x=\frac{a-b}{2} \\ y=\frac{-a+b}{2} \end{cases}$.

Dividint les dues expressions:

$\frac{x}{y}=-1$.

$y=-x$, el lloc geomètric és la recta bisectriu al segon i quart quadrant.