Problemes de Geometria 25

1.- Donada la circumferència $x^2 - 6x + y^2 - 2py + 17 = 0$. Determineu els valors de p a fi que les dues rectes tangents a la circumferència traçades des de l'origen de coordenades siguen perpendiculars.

2.- Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$. Estudieu el lloc geomètric dels punts P del plànol tals que $\overline{PM}$ és mitjana proporcional dels segments $\overline{PA}$ i $\overline{PB}$.

3.- Siga donada la recta $y = a$ i un punt P de la recta.
Siga Q la projecció de P sobre l'eix d'abscisses i M la projecció de Q sobre la recta que passa per l'origen de coordenades i el punt P.
Determineu el lloc geomètric del punt M al varia P sobre la recta $y = a$.

4.- Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle isòsceles de costat desigual $\overline{BC}$. Una circumferència és tangent interior a la circumferència circumscrita al triangle i als costats $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ en els punts P i Q, respectivament. Demostreu que el punt mig del segment $\overline{PQ}$ és l'incentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Olimpíada Catalunya 2007.

5.- Siga el rombe ABCD, A=120º. La semirecta d'origen A forma 15º amb la recta AB i talla les rectes BC i CD en els punts M i N respectivament.
Proveu que $\dfrac{3}{\overline{AM}^2} + \dfrac{3}{\overline{AN}^2} = \dfrac{4}{\overline{AB}^2}$.
Mathscope 266.2

6.- Dues circumferències de radis 6, i 8 tenen les tangents interiors perpendiculars. Determineu l'àrea del triangle format per les tangents interiors i una de les tangents exteriors.

7.- Donat el quadrat ABCD i un punt K qualsevol del costat $\overline{BC}$. La bisectriu de l'angle $\angle DAK$ talla el costat $\overline{CD}$ en el punt M. Proveu que $\overline{AK} = \overline{DM} + \overline{BK}$.

8.- Siga el rectangle ABCD i el punt P en el costat $\overline{AD}$ tal que $\angle BPC = 90º$.
La perpendicular a $\overline{BP}$ que passa per A talla $\overline{BP}$ en el punt M.
La perpendicular a $\overline{CP}$ que passa per D talla $\overline{CP}$ en el punt N.
Demostreu que el centre del rectangle està en el segment $\overline{MN}$.
Olimpiada de mayo. Argentina. 2008.

9.- Un punt A es mou sobre una circumferència d'equació $x^2 + y^2 = 16$ i altre punt B es mou sobre l'eix OX essent la distància entre els dos punts A i B de 9. Determineu el lloc geomètric del punt mig del segment $\overline{AB}$.
Oposicions de Canàries 1988.

10.- Siguen dos punts $A(a,0)$, $B(0,b)$ tal que $a + b = 2d$ (d constant). Sobre el segment $\overline{AB}$ com diagonal es construeix un quadrat els vèrtexs del qual són C i D. Proveu que al variar A i B, un dels vèrtexs roman fix i determineu el lloc geomètric que descriu l'altre.
Oposicions de Madrid 1988.