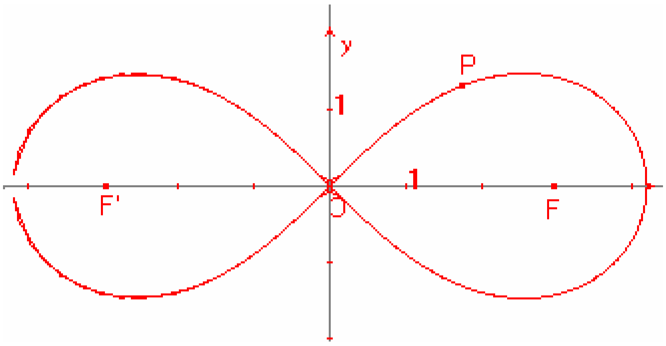
Problemes de Geometria 26

1.-
a) Calculeu el lloc geomètric dels punts del plànol el producte de distàncies a dos punts fixos F, F' situats a 2a de distància és constant i igual a a^2. Identifiqueu la corba.
b) Calculeu l'àrea del recinte limitat per la corba anterior.
Oposicions Extremadura 2006.

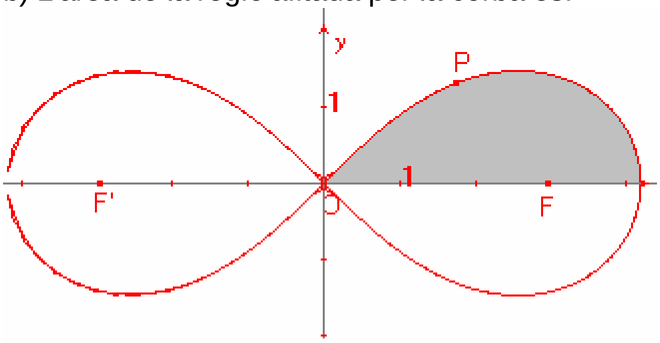
Solució:



Siga $F(a,0)$, $F'(-a,0)$.
Siga $P(x,y)$ un punt del lloc geomètric. Aleshores:
$d(P,F)\cdot d(P,F') = a^2$.
$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+a)^2+y^2} = a^2$.
Elevant al quadrat:
$\left((x-a)^2+y^2\right)\left((x+a)^2+y^2\right) = a^4$
$x^4+y^4-2a^2x^2+2x^2y^2+2a^2y^2=0$.
$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$
Aquesta corba és una Lemniscata de Benoulli de constant $\left(a\sqrt{2}\right)$
$\left(x^2+y^2\right)^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2\left(x^2-y^2\right)$.

L'equació en forma polar és:
$\rho^2 = 2a^2\cos 2\theta$.

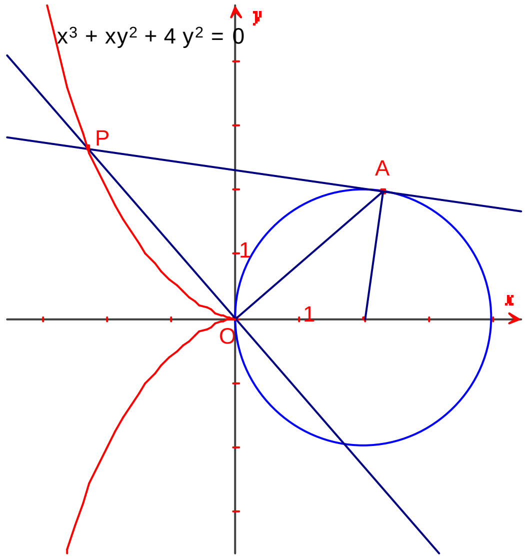
b) L'àrea de la regió afitada per la corba és:



$$S = 4\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\rho^2\,d\theta\right) = 2\int_0^{\pi/4}2a^2\cos 2\theta = 2a^2\sin 2\theta\Big]_0^{\pi/4} = 2a^2.$$

2.- Es considera la circumferència $x^2+y^2-2ax=0$. Des de l'origen O es traça una recta que talla en un punt A a la circumferència. Determineu el lloc geomètric del punt d'intersecció de la recta tangent a la circumferència en el punt A amb la perpendicular a la recta OP que passa per O.

Oposicions Andalusia 1988.



Solució:

La circumferència $x^2+y^2-2ax=0$

té centre $(a,0)$ i radi a.

Siga $A(c,d)$ el punt de la circumferència,

$$c^2+d^2-2ac=0 \qquad (1)$$

La recta que passa pels punts O, A té equació:

$$r_{OA} \equiv y=\frac{d}{c-a}(x-a).$$

La recta tangent a la circumferència pel punt A té equació:

$$r_{Tan} \equiv y-d=\frac{a-c}{d}(x-c)$$

La recta perpendiculara a la recta r_{OA} que passa per O té equació:

$$r_{Pen} \equiv y=\frac{-c}{d}x.$$

El punt Q és la intersecció de les rectes r_{OA} i r_{Pen}.

La solució del sistema format per ambdues rectes és:

$$\begin{cases} x=-c \\ y=\dfrac{-c}{d}x \end{cases}$$

De la primera equació:

$$c=-x \qquad (2)$$

De la segona equació:

$$d=\frac{-c}{y}x=\frac{x^2}{y} \qquad (3)$$

Substituint les expressions (2) (3) en l'expressió (1):

$$(-x)^2+\left(\frac{x^2}{y}\right)^2-2a(-x)=0 \qquad (4)$$

$$x^2+\frac{x^4}{y^2}+2ax=0. \quad xy^2+x^3+2ay^2=0.$$

$$x\left(x^2+y^2\right)=-2ay^2.$$

Aquesta corba és la Cissoide de Diocles.

3.- Donada la circumferència de centre $(0,0)$ radi R i el punt fix $A(a,0)$ exterior a la circumferència, es tracen des del punt A secants a la circumferència.
a) Determineu el lloc geomètric dels punts migs de les cordes.
b) Representeu el lloc.
c) Calculeu la superfície comuna al cercle i al lloc geomètric.
Oposicions País Basc, 1989.

Solució:
Siga la recta $r \equiv y = m(x-a)$ que passa pel punt A i és tangent a la circumferència $x^2+y^2=R^2$ de centre $(0,0)$ i radi R.

Calculem els punts P, Q, d'intersecció de la recta i la circumferència:

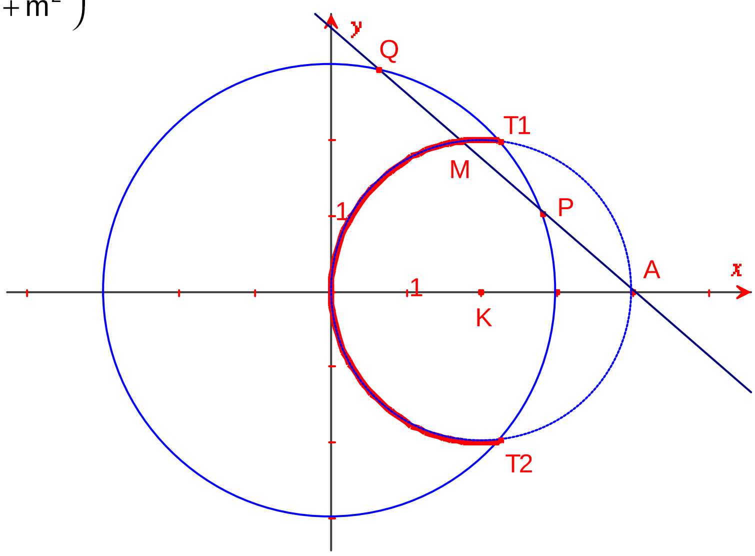
$$\begin{cases} y = m(x-a) \\ x^2+y^2=R^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \dfrac{am^2+\sqrt{R^2+m^2R^2-a^2}}{1+m^2} \\ y = m\left(\dfrac{am^2+\sqrt{R^2+m^2R^2-a^2}}{1+m^2}-a\right) \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{am^2-\sqrt{R^2+m^2R^2-a^2}}{1+m^2} \\ y = m\left(\dfrac{am^2-\sqrt{R^2+m^2R^2-a^2}}{1+m^2}-a\right) \end{cases}$$

El punt mig M del segment $\overline{PQ}$ té coordenades:

$$M\left(\frac{am^2}{1+m^2}, m\left(\frac{am^2}{1+m^2}-a\right)\right), \quad M\left(\frac{am^2}{1+m^2}, \frac{-am}{1+m^2}\right)$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{am^2}{1+m^2} \\ y = \dfrac{-am}{1+m^2} \end{cases}$$



dividint les dues equacions:

$$\frac{x}{y} = -m, \quad m = \frac{-x}{y}.$$

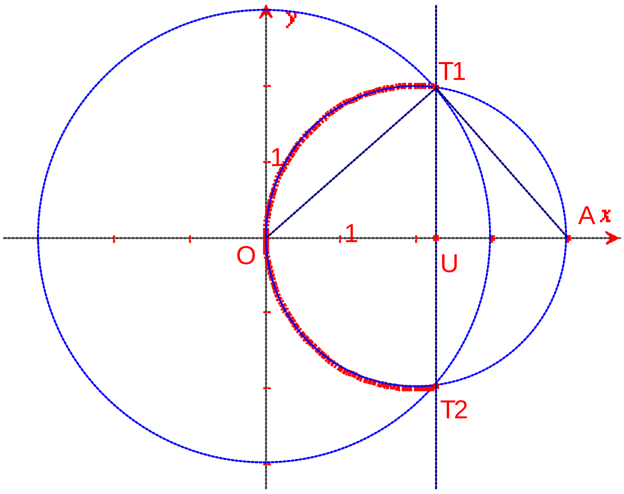
Substituint en la primera equació:

$$x = \frac{a\left(\dfrac{-x}{y}\right)^2}{1+\left(\dfrac{-x}{y}\right)^2}. \text{ Simplificant:}$$

$$x = \frac{ax^2}{x^2+y^2}. \text{ Simplificant:}$$

$x^2+y^2-ax=0$, que és la circumferència de centre $K\left(\dfrac{a}{2},0\right)$ i radi $\dfrac{a}{2}$.

El lloc geomètric és el tros de circumferència anterior inclosa dins de la circumferència inicial, que es troba en el punt d'intersecció de les rectes tangents de la recta i la circumferència inicial.



Siga T_1 un dels punts intersecció de les circumferències $x^2+y^2-ax=0$, $x^2+y^2=R^2$.

El triangle $\overset{\Delta}{OT_1A}$ és rectangle.

$\overline{OA}=a$, $\overline{OT_1}=R$.

Siga U la projecció del punt T_1 sobre l'eix d'abscisses.

Els triangles $\overset{\Delta}{OT_1A}$, $\overset{\Delta}{T_1UO}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{OU}}{R}=\frac{R}{a}$.

Aleshores la superfície comuna a les dues circumferències és:

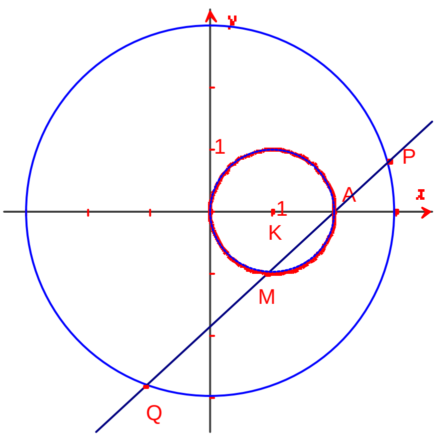
$$2\left(\int_0^{R^2/a}\sqrt{ax-x^2}\,dx+\int_{R^2/a}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx\right)=$$

$$=2\left(\left(\frac{a^2}{8}\arcsin\left(\frac{2x-a}{a}\right)+\frac{(2x-a)\sqrt{ax-x^2}}{4}\right]_0^{R^2/a}+\left(\frac{R^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)+\frac{x\sqrt{R^2-x^2}}{2}\right]_{R^2/a}^{R}\right)=$$

$$=2\left(\frac{a^2}{8}\arcsin\frac{2R^2-a^2}{a^2}+\frac{1}{4}\frac{2R^2-a^2}{a}\frac{R}{a}\sqrt{a^2-R^2}+\frac{a^2}{8}\frac{\pi}{2}\right)+$$

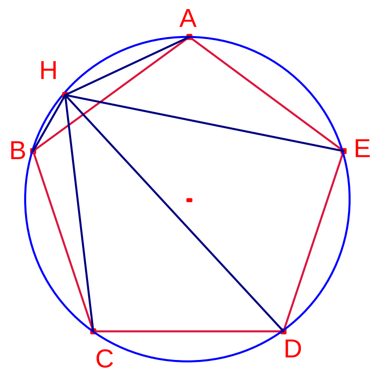
$$+2\left(\frac{R^2}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{R}{a}-\frac{1}{2}\frac{R^2}{a}\frac{R}{a}\sqrt{a^2-R^2}\right)$$

Nota: Si el punt A és interior a la circumferència el lloc geomètric és el mateix i la part comuna a les dues circumferències és la segona circumferència.



4.- Si des d'un punt H de la circumferència circumscrita a un pentàgon regular ABCDE es tracen els segments que uneixen els vèrtexs A, B, C, D, E, la suma de tres d'aquests segments és igual a la suma dels altres dos.
Luciano Olabarrieta "Geometria y trigonometría". Exercici 22. pàgina 123.

Solució.
Siga R el radi de la circumferència circumscrita al pentàgon regular ABCDE.
Suposem que H està en l'arc menor AB.
Siga $\alpha = \angle HBA$.



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AHB}$:

$$\frac{\overline{HA}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{HB}}{\sin(36^o - \alpha)} = 2R .$$

Aleshores, $\overline{HA} = 2R \cdot \sin\alpha$, $\overline{HB} = 2R \cdot \sin(36^o - \alpha)$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AHD}$:

$$\frac{\overline{HD}}{\sin(72^o + \alpha)} = 2R .$$

Aleshores, $\overline{HD} = 2R \cdot \sin(72^o + \alpha)$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{HCE}$

$$\frac{\overline{HC}}{\sin(108^o + \alpha)} = \frac{\overline{HE}}{\sin(36^o + \alpha)} = 2R .$$

Aleshores, $\overline{HC} = 2R \cdot \sin(108^o + \alpha)$, $\overline{HE} = 2R \cdot \sin(36^o + \alpha)$.

Provem que $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HD} = \overline{HC} + \overline{HE}$.

$$\overline{HC} + \overline{HE} = 2R\big(\sin(108^o + \alpha) + \sin(36^o + \alpha)\big) = 2R \cdot 2 \cdot \sin(72^o + \alpha) \cdot \cos 36^o .$$

$$\begin{aligned}
\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HD} &= 2R\big(\sin\alpha + \sin(36^o - \alpha) + \sin(72^o + \alpha)\big) = \\
&= 2R\big(2\sin 18^o \cdot \cos(18^o - \alpha) + \sin(72^o + \alpha)\big) = \\
&= 2R\big(2\sin 18^o \cdot \sin(72 + \alpha) + \sin(72^o + \alpha)\big) = \\
&= 2R\big(\sin(72^o + \alpha)(1 + 2\sin 18^o)\big)
\end{aligned}$$

Tindrem que $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HD} = \overline{HC} + \overline{HE}$ si $2 \cdot \cos 36^o = 1 + 2\sin 18^o$.

Sabem que $\cos 36^o = \dfrac{\Phi}{2} = \dfrac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{2}$.

Aleshores, $2\cos 36^o = \Phi$.

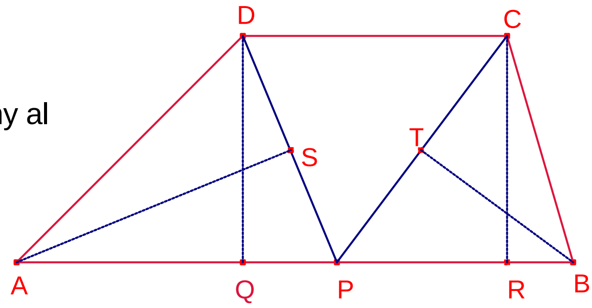
$$1 + 2 \cdot \sin 18^o = 1 + 2 \cdot \cos 72^o = 1 + 2\big(2\cos^2 36^o - 1\big) = 1 + 2\left(2\frac{\Phi^2}{4} - 1\right) =$$

$$= 1 + \Phi^2 - 2 = 1 + (\Phi + 1) - 2 = \Phi .$$

Aleshores, $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HD} = \overline{HC} + \overline{HE}$.

5.- Les bisectrius en els angles obtusos en la base d'un trapezi es tallen en l'altra base i les seues longituds són 13 i 15cm. Calculeu els costats del trapezi si l'altura és 12cm. Gúsiev 82.

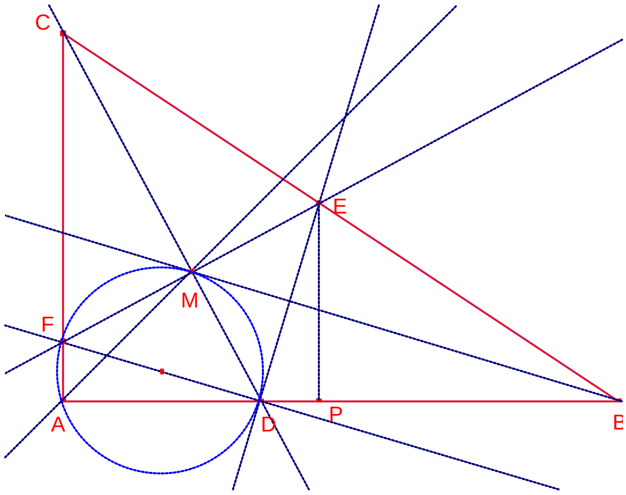
Solució:



Siga ABCD el trapezi de bases paral·leles $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.
Siguen D i C angles obtusos.
Siguen $\overline{DP}=13$, $\overline{CP}=15$ bisectrius, tal que P pertany al costat $\overline{AB}$.
Siga $\alpha=\angle ADP=\angle CDP=\angle DPA$.
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{APD}$ és isòsceles, $\overline{AD}=\overline{AP}$.
Siga Q la projecció de D sobre el costat $\overline{AB}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DQP}$:
$\overline{QP}=\sqrt{13^2-12^2}=5$.
Siga S el punt mig del segment $\overline{DP}$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AQP}$, $\overset{\Delta}{ASP}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{AP}}{\overline{SP}}=\frac{\overline{DP}}{\overline{QP}}$, aleshores, $\overline{AP}=\frac{13}{2}\frac{13}{5}=\frac{169}{10}$.

Siga $\beta=\angle BCP=\angle DCP=\angle CPB$.
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABPC}$ és isòsceles, $\overline{CB}=\overline{BP}$.
Siga R la projecció de C sobre el costat $\overline{AB}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CRP}$:
$\overline{PR}=\sqrt{15^2-12^2}=9$.
Siga T el punt mig del segment $\overline{CP}$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CRP}$, $\overset{\Delta}{BTP}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{BP}}{\overline{TP}}=\frac{\overline{CP}}{\overline{PR}}$, aleshores, $\overline{BP}=\frac{15}{2}\frac{15}{9}=\frac{25}{2}$.
Aleshores els costats del trapezi són:
$$\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{BP}=\frac{169}{10}+\frac{25}{2}=\frac{294}{10}.$$
$$\overline{BC}=\overline{BP}=\frac{25}{2}.$$
$$\overline{CD}=\overline{QP}+\overline{PR}=5+9=14.$$
$$\overline{AD}=\overline{AP}=\frac{169}{10}.$$

6.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{\circ}$. Siga I l'incentre del triangle.
La bisectriu interior de l'angle C talla el costat $\overline{AB}$ en el punt D.
La recta que passa per D i és perpendicular a $\overline{BI}$ talla el costat $\overline{BC}$ en el punt E.
La recta que passa per D i és paral·lela a $\overline{BI}$ talla el costat $\overline{AC}$ en el punt F.
Demostreu que els punts E, I, F estan alineats.
Crux Mathematicorum M425.



Solució:
Aplicant la propietat de la bisectriu:

$\overline{AD} = \dfrac{bc}{a+b}$, $\overline{BD} = \dfrac{ac}{a+b}$.

El triangle $\overset{\Delta}{DEB}$ és isòsceles, $\overline{BD} = \overline{BE}$.
Siga P la projecció del punt E sobre el catet $\overline{AB}$.

$\overline{PE} = \overline{BE} \cdot \sin B = \dfrac{ac}{a+b} \cdot \dfrac{b}{a} = \dfrac{bc}{a+b}$.

Aleshores, $\overline{PE} = \overline{AD}$. $\angle DEP = \angle FDA = \dfrac{B}{2}$.

Per tant, els triangles $\overset{\Delta}{DPE}$, $\overset{\Delta}{FAD}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{DF} = \overline{DE}$, per tant, el triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és rectangle i isòsceles.

$$\overline{BP} = \overline{BE} \cdot \cos B = \frac{ac}{a+b} \cdot \frac{c}{a} = \frac{c^2}{a+b}.$$

$$\overline{AF} = \overline{DP} = \overline{AB} - \left(\overline{Ad} + \overline{BP}\right) = c - \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{c^2}{a+b}\right) = \frac{ac - c^2}{a+b}.$$

$$\overline{CF} = \overline{AC} - \overline{Af} = b - \frac{ac - c^2}{a+b} = \frac{a^2 + ab - ac}{a+b}.$$

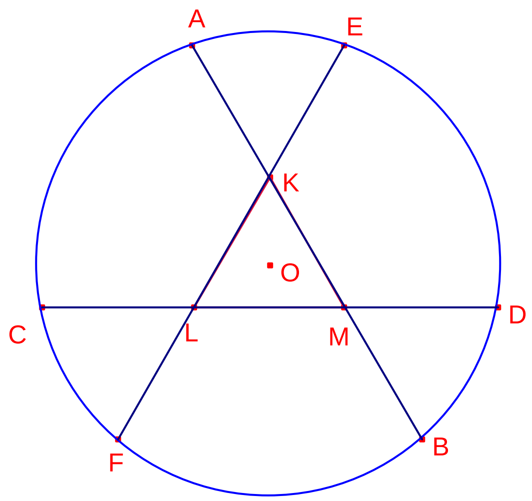
$$\overline{CE} = \overline{BC} - \overline{BE} = a - \frac{ac}{a+b} = \frac{a^2 + ab - ac}{a+b}.$$

Aleshores, $\overline{CF} = \overline{CE}$, per tant el triangle $\overset{\Delta}{CFE}$ és isòsceles.
Siga M el punt mig del segment $\overline{FE}$.
La recta CD passa pel punt M.
La recta CM és perpendicular al segment $\overline{FE}$.
La recta DM és perpendicular al segment $\overline{FE}$.

Vegem que el punt M és l'incentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Notem que $\angle FMD = 90^{\circ}$, aleshores el quadrilàter ADMF està inscrit en una circumferència.
Els angles $\angle MAF = \angle MDF = 45^{\circ}$.
Aleshores, M pertany a la bisectriu de l'angle A.
Per tant $M = I$.
Per tant, els punts E, F, I estan alineats.

7.- Una circumferència té traçades tres cordes que s'intersecten dues a dues. Dada corda està dividida pels punts d'intersecció en tres parts iguals. Determineu el radi de la circumferència, si una d'aquestes cordes és igual a a.
Shariguin I76.

Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi R.



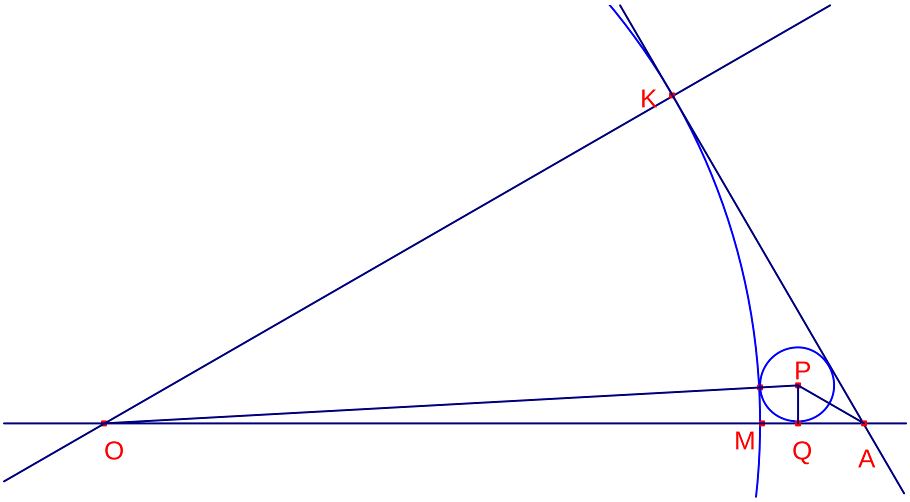
Siguen les cordes, $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$, $\overline{EF} = c$.
Siga K el punt intersecció de les cordes $\overline{AB}$, $\overline{EF}$.
Siga L el punt intersecció de les cordes $\overline{CD}$, $\overline{EF}$.
Siga M el punt intersecció de les cordes $\overline{CD}$, $\overline{AB}$.
$\overline{AK} = \overline{KM} = \overline{MB}$, $\overline{CL} = \overline{LM} = \overline{MD}$, $\overline{EK} = \overline{KL} = \overline{LF}$.

Vegem primer que les tres cordes són iguals.
Aplicant la potència al punt K respecte de la circumferència:
$\overline{AK} \cdot \overline{BK} = \overline{EK} \cdot \overline{FK}$.
$\frac{a}{3} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{c}{3} \cdot \frac{2c}{3} = R^2 - \overline{KO}^2$. Aleshores, $a = c$.
Anàlogament provaríem que $a = b$.
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ és equilàter de costat $\frac{a}{3}$.
$\overline{KO}$ és igual a $\frac{2}{3}$ de l'altura del triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$.
$\overline{KO} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{a}{3}$.

De la igualtat: $\frac{a}{3} \cdot \frac{2a}{3} = R^2 - \overline{KO}^2$:
$\frac{2}{9}a^2 = R^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{9}a\right)^2$. Resolent l'equació en la incògnita R:
$R = \frac{\sqrt{21}}{9}a$.

8.- Siga una circumferència de radi R i centre O. Des de l'extrem del segment $\overline{OA}$ que talla la circumferència en el punt M, està traçada la tangent a la circumferència AK. Determineu el radi de la circumferència tangent a l'arc MK i als segments $\overline{AK}$, $\overline{AM}$ si $\angle OAK = 60^o$.
Shariguin I137.

Solució:



Els triangle $\overset{\Delta}{OKA}$ és rectangle $\angle OKA = 90^o$.

$\overline{OA} = \dfrac{R}{\sin 60^o} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$.

Siga P el centre de la circumferència que cerquem i r el seu radi.

$\angle PAO = 30^o$.

Siga Q la projecció de P sobre el segment $\overline{OA}$.

$\overline{QA} = r\sqrt{3}$.

$\overline{OP} = R + r$, $\overline{PQ} = r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQP}$:

$\overline{OQ} = \sqrt{R^2 + 2Rr}$.

$\overline{OA} = \overline{OQ} + \overline{QA}$.

$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}R = \sqrt{R^2 + 2Rr} + r\sqrt{3}$.

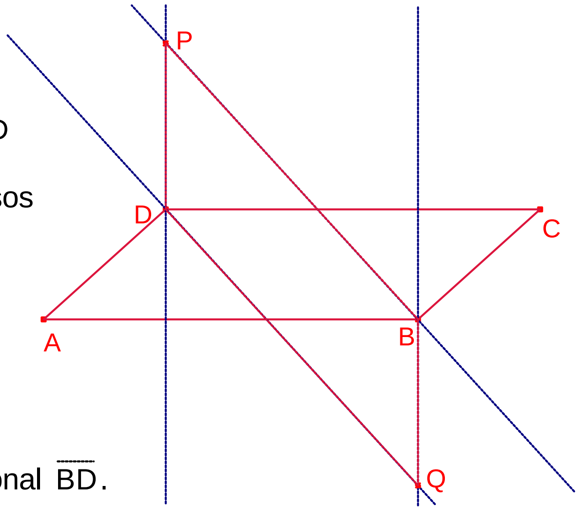
$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}R - r\sqrt{3} = \sqrt{R^2 + 2Rr}$. Elevant al quadrat:

$\dfrac{4}{3}R^2 + 3r^2 - 4Rr = R^2 + 2Rr$. Simplificant:

$3r^2 - 6Rr + \dfrac{1}{3}R^2 = 0$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r = \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{3}R$.

9.- Els costats d'un paral·lelogram són iguals a a, b $(a \neq b)$. Pels vèrtexs dels angles obtusos d'aquest paral·lelogram es tracen rectes perpendiculars als costats. Aquestes rectes formen un paral·lelogram semblant a l'inicial. Determineu el cosinus de l'angle agut dels paral·lelogram donat.
Shariguin I217.



Solució:
Siga el paral·lelogram ABCD $a=\overline{AB}$, $b=\overline{AD}$, $\alpha=\angle BAD$ angle agut del triangle.
Notem que si les altures perpendiculars als angles obtusos tallen els dos costats el problema no té solució.

Siga el paral·lelogram DQBP semblant al paral·lelogram ABCD format per les perpendiculars.
$\angle ABP = 90^o - \alpha$.
Notem que els dos paral·lelograms són iguals.

Els dos paral·lelograms són simètrics respecte a la diagonal $\overline{BD}$.
Per tant, $\angle DBA = \frac{1}{2}\angle ABP = 45^o - \frac{\alpha}{2}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\frac{b}{\sin\left(45^o - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{\sin\left(45^o + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\left(45^o - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(45^o + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}}. \qquad \frac{b}{a} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

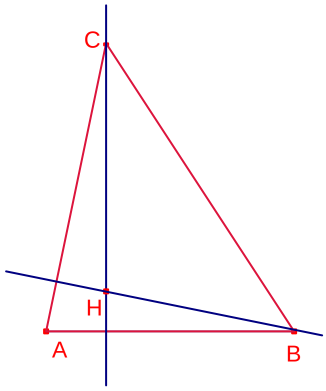
$$\frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

$b + b\sqrt{1-\cos^2\alpha} = a\cdot\cos\alpha$. $\quad b\sqrt{1-\cos^2\alpha} = a\cdot\cos\alpha - b$. Elevant al quadrat:
$-b^2\cdot\cos^2\alpha = a^2\cdot\cos^2\alpha - 2ab\cdot\cos\alpha$. Com $\cos\alpha \neq 0$.

$$\cos\alpha = \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

10.- Les altures d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ es tallen en un punt H. Determineu el valor de l'angle $\angle BCA$ sabent que $\overline{AB} = \overline{CH}$.

Oposicions secundària Ceuta 2004.



Solució:

Suposem que $C \leq 90^o$.

Notem que $\angle HCB = 90^o - B$, $\angle HBC = 90^o - C$.

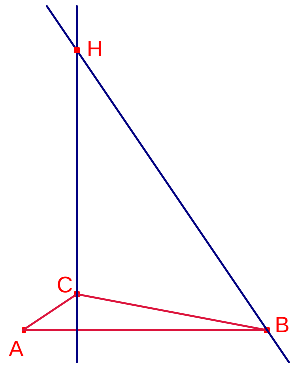
Aleshores, $\angle BHC = B + C = 180^o - A$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCH}$:

$$\frac{c}{\sin 90^o - C} = \frac{a}{\sin 180^o - A}.$$

$$\frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

Aleshores, $\mathrm{tg}C = 1$. Per tant, $C = 45^o$.



Suposem que $C > 90^o$.

Notem que $\angle HCB = 90^o + B$, $\angle HBC = C - 90^o$.

Aleshores, $\angle BHC = A$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCH}$:

$$\frac{c}{\sin C - 90} = \frac{a}{\sin A}.$$

$$\frac{c}{-\cos C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

Aleshores, $\mathrm{tg}C = -1$. Per tant, $C = 135^o$.