

Problemes Geometria 27

1.- Siga el tetraedre regular ABCD. Determineu E un punt de l'aresta \overline{AB} tal que l'angle $\angle CED$ siga màxim.

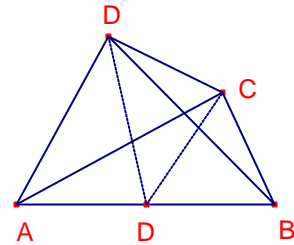
Solució:

Considerem les coordenades del tetraedre:

$$A(0,0,0), B(1,0,0), C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right).$$

$$d(A,D) = d(B,D) = d(C,D) = 1.$$

$$\text{Resolent el sistema: } D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$



Siga $E(x,0,0)$, $0 \leq x \leq 1$ un punt de l'aresta \overline{AB} .

$$\overrightarrow{EC} = \left(\frac{1}{2} - x, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad \overrightarrow{ED} = \left(\frac{1}{2} - x, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

Aplicant el producte escalar $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{ED} = \|\overrightarrow{EC}\| \cdot \|\overrightarrow{ED}\| \cdot \cos \alpha$, on $\alpha = \angle CED$.

$$\cos \alpha = \frac{x^2 - x + \frac{1}{2}}{x^2 - x + 1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

El valor màxim de l'angle $\alpha = \angle CED$ s'assoleix en el mínim de la funció

$$f(x) = \frac{x^2 - x + \frac{1}{2}}{x^2 - x + 1} \text{ ja que la funció cosinus és decreixent en } [0, \pi].$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{2x - 1}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \text{ quan } x = \frac{1}{2} \text{ que és un mínim relatiu.}$$

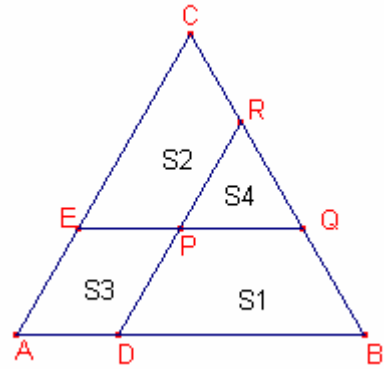
L'angle màxim s'assoleix quan E és el punt mig de l'aresta \overline{AB} . Aquest angle és justament l'angle dièdric del tetraedre:

$$\alpha_{\text{màxim}} = \arccos \frac{1}{3} \approx 70^\circ 31' 44''.$$

El mínim s'assoleix quan $x = 0, 1$, és a dir quan E és el punt A o B.

$$\alpha_{\text{mínim}} = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ.$$

2.- Donat el triangle equilàter $\triangle ABC$ de costat 1. Determineu el punt D del costat \overline{AB} i el punt E del costat \overline{AC} que al traçar paral·leles per D al costat \overline{AC} , i per E al costat \overline{AB} , determinen 4 regions S_1, S_2, S_3, S_4 del triangle les àrees de les quals estan en progressió aritmètica (veure figura).
Oposicions València 2010



Solució 1:

Siga d la diferència de la progressió aritmètica:

$$S_2 = S_1 + d, \quad S_3 = S_1 + 2d, \quad S_4 = S_1 + 3d.$$

$$\text{Siga } x = \overline{AD}, \quad y = \overline{AE}.$$

$$\text{Notem que } \overline{CR} = \overline{EP} = x, \quad \overline{BQ} = y.$$

$$\text{Aleshores, } \overline{RQ} = 1 - x - y.$$

$$\text{L'àrea de } S_1 \text{ és: } S_1 = (2 - 2x - y)y \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (1)$$

$$\text{L'àrea de } S_2 \text{ és: } S_1 + d = (2 - x - 2y)x \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (2)$$

$$\text{L'àrea de } S_3 \text{ és: } S_1 + 2d = xy \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

L'àrea de S_4 és:

$$S_1 + 3d = (1 - x - y)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (4)$$

Restant les expressions (4) i (3):

$$d = (1 + x^2 + y^2 - 2x - 2y) \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (5)$$

Restant les expressions (3) i (2):

$$d = (4xy - 2x + x^2) \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (6)$$

Restant les expressions (2) i (1):

$$d = (-x^2 + y^2 + 2x - 2y) \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (7)$$

Igualant les expressions (5) i (7):

$$2x^2 - 4x + 1 = 0, \text{ la solució del qual és: } x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \quad (8)$$

Igualant les expressions (5) i (6):

$$y^2 + (-4x - 2)y + 1 = 0 \quad (9)$$

Substituint l'expressió (8) en l'expressió (9):

$$y^2 + (-6 + 2\sqrt{2})y + 1 = 0 \quad (10)$$

Resolent l'equació:

$$y = 3 - \sqrt{2} - \sqrt{10 - 6\sqrt{2}} \quad (11)$$

Aleshores D és tal que $\overline{AD} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ i E tal que $\overline{AE} = 3 - \sqrt{2} - \sqrt{10 - 6\sqrt{2}}$.

Solució 2:

Siga $x = \overline{DB}$, $y = \overline{EC}$.

Siguen S_1, S_2, S_3, S_4 les àrees del triangle les quals estan

en progressió aritmètica. $S_1 + S_4 = S_2 + S_3 = \frac{1}{2}S_{ABC}$,

$$S_3 = \frac{1}{2}(S_2 + S_4).$$

$$S_{DBR} = S_1 + S_4 = S_2 + S_3 = \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

$$S_{DBR} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2, S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Aleshores, $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}$. Resolent l'equació: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

La superfície del paral·lelogram ADPE és: $S_3 = (1-x)(1-y)\frac{\sqrt{3}}{2}$.

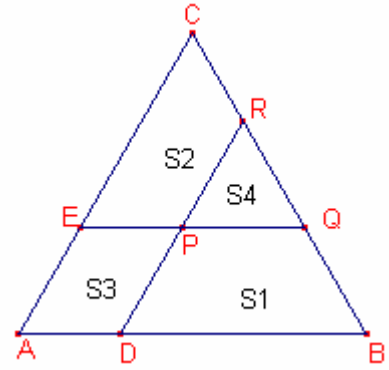
La superfície del triangle equilàter EQC: $S_{EQC} = S_2 + S_4 = \frac{\sqrt{3}}{4}y^2$.

Aleshores, $(1-x)(1-y)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{4}y^2$.

$$y^2 = 4(1-x)(1-y).$$

$$y^2 = 4\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1-y). \text{ Resolent l'equació: } y = -2 + \sqrt{2} + \sqrt{10 - 6\sqrt{2}}.$$

Aleshores D és tal que $\overline{DB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i E tal que $\overline{EC} = -2 + \sqrt{2} + \sqrt{10 - 6\sqrt{2}}$.



3.- La raó entre el perímetre d'un rombe i la suma de les diagonals és k .
 Determineu els angles del rombe.
 Gúsiév 68.

Solució:

Siga el rombe PQRS de costat $c = \overline{PQ} = \overline{PS} = \overline{QR} = \overline{RS}$ i centre O.

Siguen les diagonals $d = \overline{PR}$, $D = \overline{QS}$.

$$\frac{4c}{D+d} = k.$$

Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\triangle PQS$:
 $2c > D$.

Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\triangle PQR$:
 $2c > d$.

Sumant ambdues expressions $4c > D + d$, aleshores, $k > 1$.

Aplicant la desigualtat triangular al triangle rectangle $\triangle POQ$:

$$c < \frac{D}{2} + \frac{d}{2}, \text{ aleshores, } 2c < D + d. \text{ aleshores, } k < 2.$$

Siga $\alpha = \angle SPR$. Els angles del rombe són 2α , $180^\circ - 2\alpha$.

De l'expressió $\frac{4c}{D+d} = k$:

$$\frac{1}{\frac{D}{2c} + \frac{d}{2c}} = \frac{k}{2}.$$

$$\frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{k}{2}.$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{k}.$$

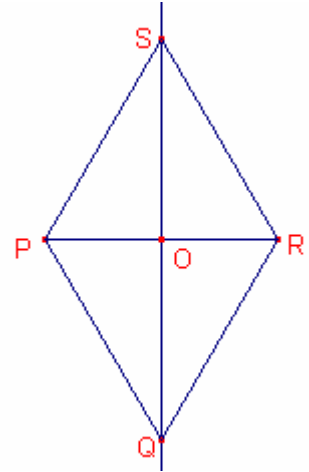
Elevant al quadrat:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{4}{k^2}.$$

$$\sin 2\alpha = \frac{4}{k^2} - 1, \quad -1 \leq \frac{4-k^2}{k^2} \leq 1, \text{ aleshores, } \sqrt{2} \leq k < 2.$$

$$2\alpha = \arcsin\left(\frac{4-k^2}{k^2}\right), \text{ a més a més, } \sqrt{2} \leq k < 2.$$

$$\text{L'altre angle és } 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \arcsin\left(\frac{4-k^2}{k^2}\right).$$



4.- Dues circumferències de radis r , R són tangents exteriors.
 Calculeu la longitud del segment tangent a les dues circumferències.
Gúsiév 118.

Solució:

Siga la circumferència de centre A i radi $r = \overline{AC}$.

Siga la circumferència de centre B i radi $R = \overline{BC}$.

C el punt de tangència de les dues circumferències.

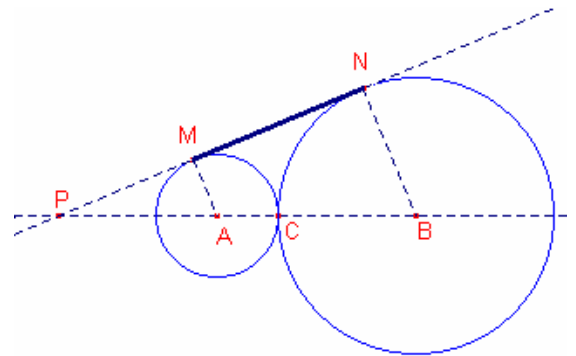
Siga P el centre d'homotècia de les dues circumferències.

Siguen M , N els punts de tangència de la recta tangent a les dues circumferències.

Volen calcular $x = \overline{MN}$.

Els segments \overline{AM} , \overline{BN} són perpendiculars a la recta tangent a les dues circumferències.

Siga $a = \overline{PA}$, $b = \overline{PB}$.



Els triangles $\triangle PAM$, $\triangle PBN$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{R+r} = \frac{b}{a+r} \quad (1)$$

$$\frac{R}{a+R+2r} = \frac{r}{a+r} \quad (2)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle PAM$:

$$(a+r)^2 = r^2 + b^2 \quad (3)$$

De la expressió (2):

$$a = \frac{2r^2}{R-r} \quad (4)$$

Substituint l'expressió (4) en l'expressió (3):

$$b = \frac{2r\sqrt{Rr}}{R-r} \quad (5)$$

Substituint les expressions (4) i (5) en l'expressió (1):

$$x = 2\sqrt{Rr}.$$

5.- Els costats d'un paral·lelogram estan en proporció p:q i les diagonals m:n.
 Determineu els angles del paral·lelogram.
 Gúsiév 72.

Solució:

Siga el paral·lelogram ABCD. Siga $\alpha = \angle BAD$. Aleshores, $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$.

Siga $\overline{AB} = xp$, $\overline{BC} = xq$.

Siga $\overline{AC} = ym$, $\overline{BD} = yn$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABD$:

$$n^2 y^2 = x^2 (p^2 + q^2) - 2x^2 pq \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$:

$$m^2 y^2 = x^2 (p^2 + q^2) + 2x^2 pq \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

Sumant ambdues expressions:

$$(m^2 + n^2) y^2 = 2(p^2 + q^2) x^2 \quad (3)$$

$$x^2 = \frac{m^2 + n^2}{2(p^2 + q^2)} y^2 \quad (4)$$

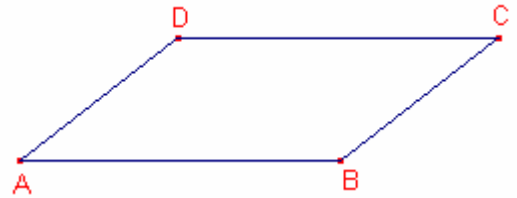
Substituint l'expressió (4) en l'expressió (2):

$$m^2 y^2 = \frac{m^2 + n^2}{2(p^2 + q^2)} y^2 (p^2 + q^2) + 2 \frac{m^2 + n^2}{2(p^2 + q^2)} y^2 \cdot pq \cdot \cos \alpha \quad (5)$$

Simplificant:

$$\cos \alpha = \frac{(m^2 - n^2)(p^2 + q^2)}{2pq(m^2 + n^2)} \quad (6)$$

Aleshores, $\alpha = \arccos \left(\frac{(m^2 - n^2)(p^2 + q^2)}{2pq(m^2 + n^2)} \right)$. L'altre angle és el suplementari.



6.- Les diagonals d'un paral·lelogram són proporcionals als costats no paral·lels.
 Demostreu que els angles de les diagonals són iguals als angles del paral·lelogram.
 Gúsiév 69.

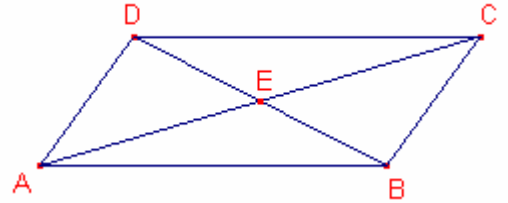
Solució:

Siga el paral·lelogram ABCD, $a = \overline{AB} = \overline{CD}$,

$b = \overline{BC} = \overline{AD}$. Siga $\alpha = \angle BAD$.

Siga E la intersecció de les diagonals.

Les diagonals d'un paral·lelogram són proporcionals als costats no paral·lels, siga: $\overline{AC} = ka$, $\overline{BD} = kb$.



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABD$:

$$\cos \alpha = \frac{k^2 b^2 - a^2 - b^2}{-2ab} \quad (1)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{k^2 a^2 - a^2 - b^2}{-2ab} \quad (2)$$

De les expressions (1) (2):

$$\frac{k^2 b^2 - a^2 - b^2}{-2ab} = -\frac{k^2 a^2 - a^2 - b^2}{-2ab}. \text{ Simplificant:}$$

$$k = \sqrt{2}.$$

$$\overline{AE} = \frac{1}{2}\sqrt{2}a, \quad \overline{BE} = \frac{1}{2}\sqrt{2}k, \quad \overline{AC} = \sqrt{2}a.$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Aleshores els triangles $\triangle ABC$, $\triangle AEB$ són semblants. Aleshores,

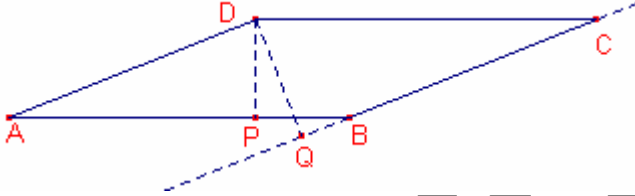
$$\angle AEB = \angle ABC = 180^\circ - \alpha.$$

$$\angle BEC = 180^\circ - \angle AEB = \alpha.$$

Aleshores, els angles de les diagonals són iguals als angles del paral·lelogram.

7.- Dues altures traçades des del vèrtex de l'angle obtús d'un paral·lelogram mesuren p , q , respectivament i l'angle entre les altures és α .
 Determineu la mesura de la diagonal major.
Gúsiev 64.

Solució:



Siga el paral·lelogram ABCD, $a = \overline{AB} = \overline{CD}$, $b = \overline{BC} = \overline{AD}$.

Siga $p = \overline{DP}$ altura del paral·lelogram sobre el costat \overline{AB} .

Siga $q = \overline{DQ}$ altura del paral·lelogram sobre el costat \overline{BC} .

Siga $\alpha = \angle PDQ$. Aleshores, $\angle BCD = \alpha$.

Siga $d = \overline{AC}$ diagonal major del paral·lelogram.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle $\triangle APD$:

$$b = \frac{p}{\sin \alpha} \quad (1)$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle $\triangle CQD$:

$$a = \frac{q}{\sin \alpha} \quad (2).$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$:

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \quad (3)$$

Substituint les expressions (1) (2) en l'expressió (3):

$$d^2 = \frac{p^2 + q^2}{\sin^2 \alpha} + 2 \frac{pq}{\sin^2 \alpha} \cdot \cos \alpha.$$

$$d = \frac{\sqrt{p^2 + q^2 + 2pq \cdot \cos \alpha}}{\sin \alpha}.$$

8.- \overline{AB} i \overline{CD} són dues cordes d'una circumferència de radi R que s'intersecten perpendicularment.

Proveu que $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 4R^2$.

Gúsiév 125.

Solució:

Siga $\alpha = \angle ADC$, aleshores, $\angle BAD = 90^\circ - \alpha$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ACD$:

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \alpha} = 2R.$$

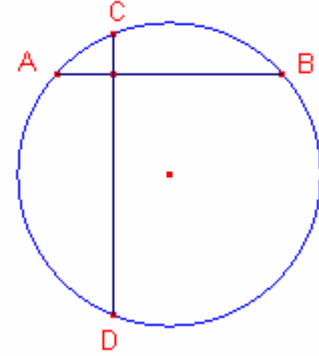
Aleshores, $\overline{AC}^2 = 4R^2 \cdot \sin^2 \alpha$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABD$:

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R.$$

Aleshores, $\overline{BD}^2 = 4R^2 \cdot \cos^2 \alpha$.

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 4R^2 \sin^2 \alpha + 4R^2 \cos^2 \alpha = 4R^2.$$



9.- Demostreu que la suma dels quadrats de les distàncies des d'un punt M del diàmetre de una circumferència fins els extrems de qualssevol de les cordes paral·leles al diàmetre és constant.
Gúsiév 126.

Solució:

Siga una circumferència de centre O i radi R.

Siga un punt M del diàmetre tal que $x = \overline{OM}$.

Siga \overline{AB} una corda variable paral·lela al diàmetre que conté M

Suposem que la distància de la corda \overline{AB} al diàmetre és r (variable).

Siguen P i Q les projeccions de A i B, respectivament, sobre el diàmetre.

Siga $\overline{OP} = \overline{OQ} = y$.

$\overline{MQ} = y - x$, $\overline{MP} = y + x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle APO$:

$$R^2 = r^2 + y^2.$$

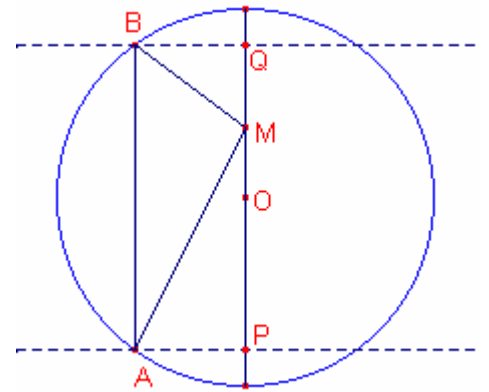
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle APM$:

$$\overline{AM}^2 = r^2 + (x + y)^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle BQM$:

$$\overline{BM}^2 = r^2 + (y - x)^2.$$

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = r^2 + (x + y)^2 + r^2 + (y - x)^2 = 2r^2 + 2x^2 + 2y^2 = 2(R^2 + x^2).$$



10.- L'angle agut A d'un rombe ABCD és α .

Determineu la raó entre el radi de la circumferència inscrita en rombe i el radi de la

circumferència inscrita en el triangle $\triangle ABC$.

Gúsiév 180.

Solució:

Siga R el radi de la circumferència inscrita en el rombe ABCD.

Siga O el centre del rombe.

Siga T el punt de tangència de la circumferència inscrita al rombe i el costat \overline{AB} .

Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle ABC$.

Siga $c = \overline{AB}$ costat del rombe, $m = \overline{AC}$, diagonal major, $n = \overline{BD}$ diagonal menor.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle ABO$:

$$\frac{m}{2c} = \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{n}{2c} = \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle ATO$:

$$\frac{2R}{m} = \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$R = \frac{1}{2}m \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és:

$$S_{ABC} = \frac{mn}{8} = \frac{2c+m}{2}r.$$

$$r = \frac{mn}{4(2c+m)} \quad (2)$$

Dividint les expressions (1) (2):

$$\frac{R}{r} = \frac{\frac{1}{2}m \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{mn}{4(2c+m)}} = \frac{2(2c+m)}{n} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2\left(2+2\frac{m}{2c}\right)}{2\frac{n}{2c}} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2+2\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\alpha}{2} = 2\left(1+\cos \frac{\alpha}{2}\right).$$

