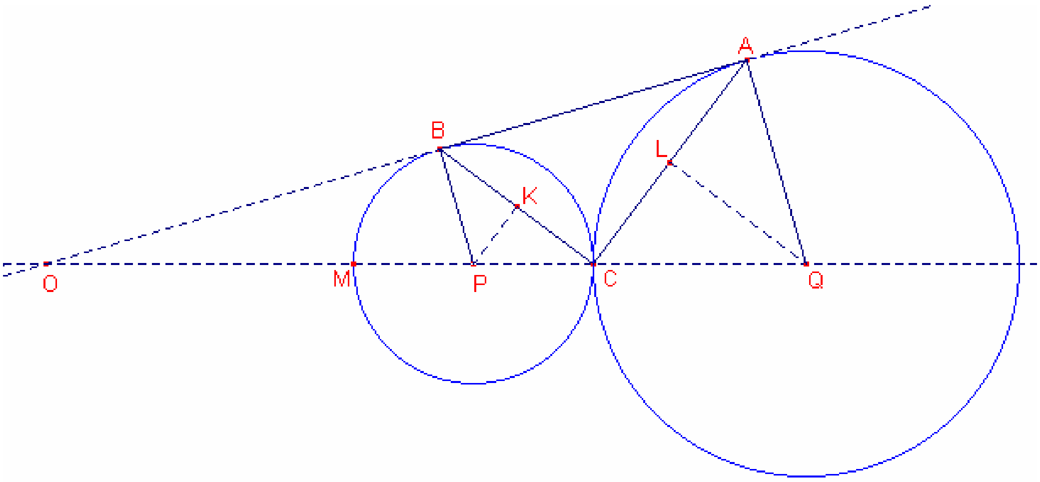
Problemes Geometria 28

1.- Dues circumferències són tangents exteriors en el punt C, $\overline{AB}$ és la tangent exterior comuna.
Determineu els radis de les dues circumferències si $\overline{AC}=8$, $\overline{BC}=6$.
Gúsiev 127.

Solució:



Siga la circumferència de menuda de centre P i radi $r=\overline{PB}=\overline{PC}$.
Siga la circumferència de gran de centre Q i radi $R=\overline{QA}=\overline{QC}$.
Siga O el centre d'homotècia de les dues circumferències.
Aleshores, $\angle BPO=\angle AQO=\alpha$.

$\angle BPC=180º-\alpha$, $\angle PCB=\frac{\alpha}{2}$. $\angle ACQ=\frac{180º-\alpha}{2}=90º-\frac{\alpha}{2}$.

Aleshores, $\angle ACB=90º$. $\angle ABC=90º-\alpha$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACB}$:

$\overline{AB}=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

Siga $\overline{PK}$ l'altura del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{BCP}$. $\overline{CK}=3$.

Siga $\overline{QL}$ l'altura del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ACQ}$. $\overline{CL}=4$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ACB}$, $\overset{\Delta}{QLC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{CL}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{CQ}}{\overline{AB}}$.

$\frac{4}{6}=\frac{R}{10}$. Aleshores, $R=\frac{20}{3}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ACB}$, $\overset{\Delta}{CKP}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

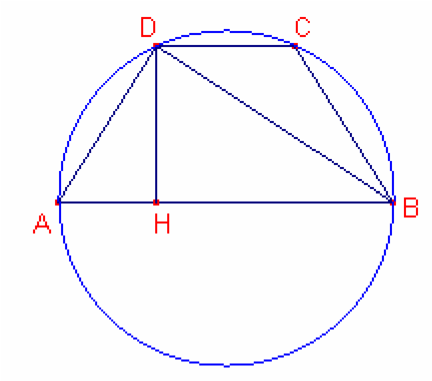
$\frac{\overline{CK}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{CP}}{\overline{AB}}$.

$\frac{3}{8}=\frac{r}{10}$. Aleshores, $r=\frac{15}{4}$.

2.- Les bases d'un trapezi isòsceles són a, b $a>b$ i l'angle agut α .
Determineu el radi de la circumferència circumscrita al trapezi.
Gúsiev 178.

Solució:

Siga el trapezi ABCD de bases $a=\overline{AB}$, $b=\overline{CD}$.
Siga $\alpha=\angle DAB$.
$\angle ADC = 180^{o} - \alpha$
Un trapezi isòsceles està inscrit en una circumferència ja que els angles oposats són suplementaris.



Siga $\overline{DH}$ altura del trapezi.

$$\overline{AH}=\frac{a-b}{2}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHD}$:

$$\overline{AD}=\frac{a-b}{2\cos\alpha}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\overline{BD}^2 = a^2 + \left(\frac{a-b}{2\cos\alpha}\right)^2 - 2a\frac{a-b}{2\cos\alpha}\cos-\alpha .$$

$$\overline{BD}^2 = a^2 + \left(\frac{a-b}{2\cos\alpha}\right)^2 - a(a-b) .$$

$$\overline{BD} = \frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab+4ab\cdot\cos^2\alpha}}{2\cos\alpha}.$$

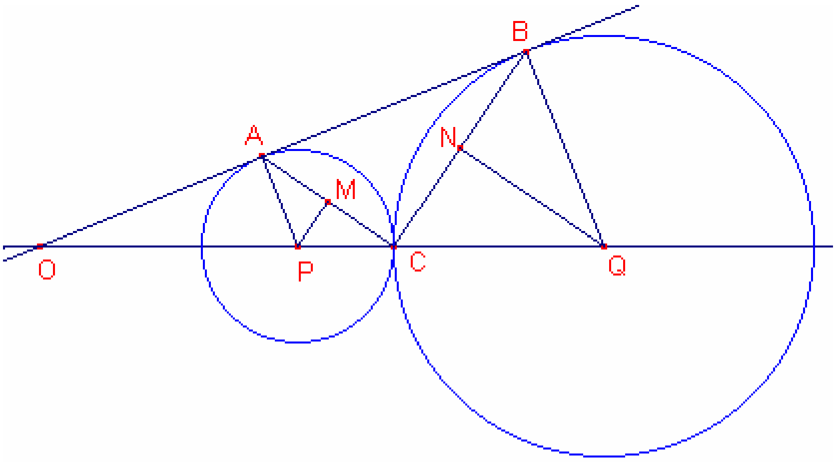
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$\frac{\overline{BD}}{\sin(180^{o}-\alpha)} = 2R$, on R és el radi de la circumferència circumscrita a $\overset{\Delta}{ABD}$, que és la circumferència circumscrita al trapezi.

$$R = \frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab+4ab\cdot\cos^2\alpha}}{4\sin\alpha\cdot\cos\alpha}.$$

3.- La tangent exterior comuna a dues circumferències tangents exteriors forma un angle α amb la línia que uneix els centres. Determineu la raó entre els radis de les circumferències.
Gúsiev 122.

Solució:



Siga la circumferència de centre P i radi r i la circumferència de centre Q i radi R.
Siguen A i B els punts de tangència a la recta tangent exterior comuna a les circumferències.
Siga C el punt de tangència de les dues circumferències.
Siga O centre d'homotècia de les circumferències, intersecció entre la tangent exterior comuna i la línia que uneix els centres.
Siga $\alpha = \angle AOP$. Siga M el punt mig del segment $\overline{AC}$. Siga N el punt mig del segment $\overline{BC}$.
Siga $x = \overline{CM}$, $y = \overline{CN}$.

$\angle APC = 90^o + \alpha$, $\angle ACP = 45^o - \frac{\alpha}{2}$. $\angle BAC = 45^o + \frac{\alpha}{2}$

$\angle BQC = 90^o - \alpha$, $\angle NQC = 45^o - \frac{\alpha}{2}$. $\angle NCQ = 45^o + \frac{\alpha}{2}$

Aleshores, $\angle ACB = 90^o$.
$\angle ABC = 45^o - \alpha$, $\overline{AC} = 2x$, $\overline{BC} = 2y$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{2x}{2y} = \frac{x}{y} = \operatorname{tg}\left(45^o - \frac{\alpha}{2}\right) \qquad (1)$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PCM}$:

$$x = r \cdot \sin\left(45^o + \frac{\alpha}{2}\right) \qquad (2)$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CQN}$:

$$y = R \cdot \sin\left(45^o - \frac{\alpha}{2}\right) \qquad (3)$$

Dividint les expressions (2) i (3):

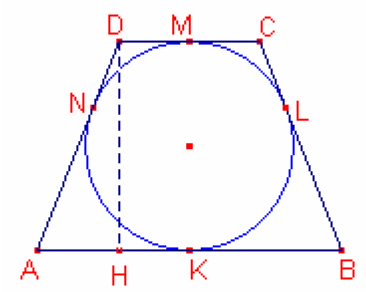
$$\frac{x}{y} = \frac{r}{R}\operatorname{tg}\left(45^o + \frac{\alpha}{2}\right) \qquad (4)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (4):

$$\frac{r}{R}=\frac{\mathrm{tg}\left(45^{o}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\mathrm{tg}\left(45^{o}+\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\dfrac{1-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}}=\left(\frac{1-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)^2=\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2=\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

4.- Un trapezi isòsceles té inscrita una circumferència. Determineu els angles aguts si coneixem que la raó entre el costat lateral i la base menor és k.
Gúsiev 181.

Solució:
Siga el trapezi isòsceles ABCD de base menor $\overline{CD} = 2y$ i costat lateral $\overline{AD} = 2ky$.
Siga $\overline{AB} = 2x$ base major.
Siguen K, L, M, N els punts de tangència de la circumferència inscrita al trapezi.
$\overline{AK} = \overline{AN} = \overline{BK} = \overline{BL} = x$.
$\overline{CL} = \overline{CM} = \overline{DM} = \overline{DN} = y$.
$\overline{AD} = x + y$.
Aleshores, $x + y = 2ky$.
$x = (2k-1)y$ (1)
Siga $\overline{DH}$ altura del trapezi.
$\overline{AH} = x - y$.
Siga $\alpha = \angle DAB$ angle agut del trapezi.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHD}$

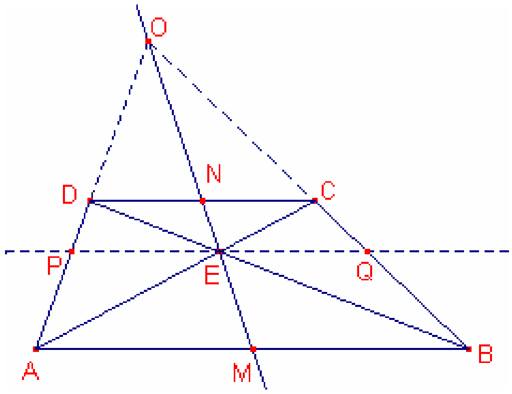
$\cos\alpha = \dfrac{x-y}{x+y}$ (2)

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2):

$\cos\alpha = \dfrac{k-1}{k}$.

$\alpha = \arccos\left(\dfrac{k-1}{k}\right)$, $0 < \dfrac{k-1}{k} \le 1$. És a dir, $\alpha = \arccos\left(\dfrac{k-1}{k}\right)$ quan $k > 1$.

5.- Demostreu que la recta que passa pel punt intersecció de les continuacions dels costats laterals d'un trapezi i els punt intersecció de les diagonals divideix les bases per la meitat.
Gúsiev 89.



Solució:
Siga el trapezi ABCD.
Siga $a=\overline{AB}$, $b=\overline{CD}$ bases del trapezi.
Siga O la intersecció dels costats laterals.
Siga E la intersecció de les diagonals.
Tracem una paral·lela al costat $\overline{AB}$ que passa pel punt E.
Aquesta recta talla els costats laterals en els punts P, Q, respectivament.
La recta OE talla el costat $\overline{AB}$ en M i el costat $\overline{CD}$ en N.

Els triangles $\overset{\Delta}{CED}$, $\overset{\Delta}{AEB}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}=\frac{b}{a},\quad \frac{\overline{DE}}{\overline{BE}}=\frac{b}{a}.$$

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{DE}+\overline{BE}}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+1}=\frac{a}{a+b}.$$ Anàlogament $$\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}=\frac{a}{a+b}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{PED}$, $\overset{\Delta}{ABD}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PE}}{a}=\frac{\overline{DE}}{\overline{BD}}.\quad \overline{PE}=\frac{a^2}{a+b}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{EQC}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{EQ}}{a}=\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}.\quad \overline{EQ}=\frac{a^2}{a+b}.$$

Aleshores E és el punt mig del segment $\overline{PQ}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AEO}$, $\overset{\Delta}{AMO}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PE}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{OE}}{\overline{OM}}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{EQO}$, $\overset{\Delta}{MBO}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

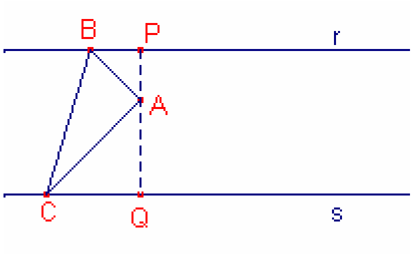
$$\frac{\overline{QE}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{OE}}{\overline{OM}}.$$

Aleshores, $\overline{AM}=\overline{BM}$. Per tant, M és el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Anàlogament N és el punt mig del costat $\overline{CD}$.

6.- El punt A està entre dues rectes paral·leles r, s, i està a una distància a, b de les rectes r, s, respectivament.

El punt A és l'angle recte del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que B és de r i C de s.
De tots aquests triangles determineu els catets dels de menor àrea.
Gúsiev 540.

Solució:
Siga P i Q les projeccions de A sobre les rectes r, s respectivament.



$\overline{AP} = a$, $\overline{AQ} = b$.
Siga $\alpha = \angle CAQ$, aleshores, $\angle BAP = 90º - \alpha$.
Siga $x = \overline{BP}$, $\overline{CQ} = y$

Els triangles $\overset{\Delta}{ACQ}$, $\overset{\Delta}{BAP}$. Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{a}{x} = \frac{y}{b}$. Aleshores, $y = \frac{ab}{x}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BAP}$:
$\overline{AB} = \sqrt{a^2 + x^2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACQ}$:

$$\overline{AC} = \sqrt{b^2 + \left(\frac{ab}{x}\right)^2} = \frac{b}{x}\sqrt{a^2 + x^2}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

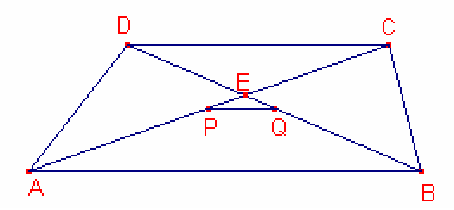
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{b}{2}\frac{x^2 + a^2}{x}.$$

Considerem la funció $f(x) = \frac{b}{2}\frac{x^2 + a^2}{x}$. Determinem el seu mínim:

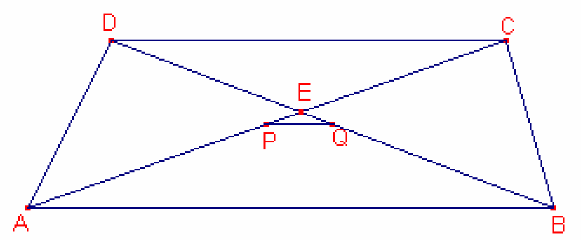
$f'(x) = \frac{x^2 - a^2}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2a^2}{x^3}$
$f'(x) = 0$ si $x = a$.
$f''(a) > 0$.
Aleshores, $x = a$ és un mínim relatiu estricte.
Els catets, el triangle del qual té àrea mínima, mesuren:
$\overline{AB} = a\sqrt{2}$, $\overline{AC} = b\sqrt{2}$.
L'àrea mínima és: $S_{mín} = ab$.

7.- Una de les bases d'un trapezi és 24 i la distància entre els punts migs de les diagonals és 4. Determineu la mesura de l'altra base.
Gúsiev 79.

Solució:
Siga ABCD un trapezi de bases paral·leles $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.
Siga P el punt mig de la diagonal $\overline{AC}$.
Siga Q el punt mig de la diagonal $\overline{BD}$.
$\overline{PQ} = 4$.
Siga E la intersecció de les diagonals $\overline{AC}$, $\overline{BD}$.

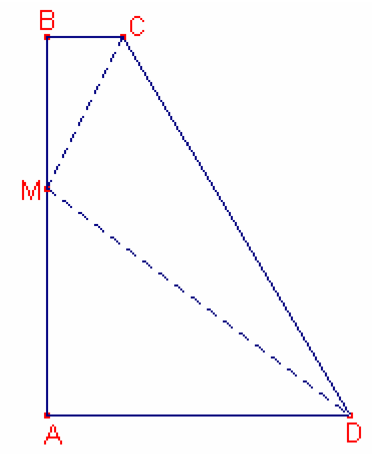


a) Suposem que $\overline{AB} = 24$ és la base major.
Siga $b = \overline{CD}$ base menor
Els triangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{PQE}$ són semblants i la raó de semblança és 6:1.
Siga $\overline{PE} = x$, $\overline{AP} = 5x$.
Els triangles $\overset{\Delta}{CDE}$, $\overset{\Delta}{PQE}$ són semblants i la raó de semblança és $b:4$.
Si $\overline{PE} = x$, $\overline{CE} = \frac{b}{4}x$.
Com que $\overline{AP} = \overline{CP}$:
$5x = x + \frac{b}{4}x$. Resolent l'equació en la incògnita b:
$b = 16$.



b) Suposem que $\overline{CD} = 24$ és la base menor.
Siga $a = \overline{AB}$ base major
Els triangles $\overset{\Delta}{CDE}$, $\overset{\Delta}{QPE}$ són semblants i la raó de semblança és 6:1.
Siga $\overline{PE} = x$, $\overline{CE} = 6x$.
Els triangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{PQE}$ són semblants i la raó de semblança és $a:4$.
Si $\overline{PE} = x$, $\overline{CE} = \frac{a}{4}x$.
Com que $\overline{AP} = \overline{CP}$:
$\frac{a}{4} - x = 6x + x$. Resolent l'equació en la incògnita a:
$a = 32$.

8.- Siga ABCD un trapezi amb angles rectes A i B, tal que $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=1$, $\overline{AD}=5$. Siga M un punt del costat $\overline{AD}$ tal que l'angle $\angle AMD$ és el doble de l'angle $\angle BMC$. Calculeu la raó $\overline{AM}:\overline{MB}$.
Gúsiev 84.



Solució:
Siga $\alpha=\angle BMC$, $2\alpha=\angle AMD$.
Siga $x=\overline{AM}$, $\overline{MB}=5-x$.

$$tg2\alpha=\frac{4}{x}.$$

$$tg\alpha=\frac{1}{5-x}.$$

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{4}{x}.$$

$$\frac{2\frac{1}{5-x}}{1-\left(\frac{1}{5-x}\right)^2}=\frac{4}{x}.$$

$$\frac{-2x+10}{x^2-10x+24}=\frac{4}{x}.$$

$3x^2-25x+48=0$. Resolent l'equació:

$x=\frac{16}{3}$ que és absurda ja que $x\le 5$.

$x=3$

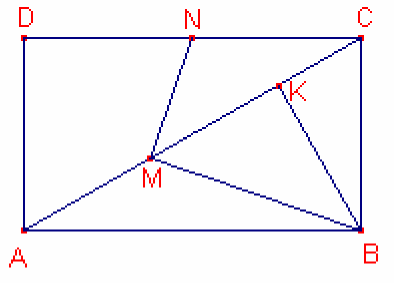
$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{3}{2}.$$

9.- En un rectangle ABCD s'ha traçat la perpendicular $\overline{BK}$ a la diagonal $\overline{AC}$.
Els punts M, N divideixen per la meitat els segments $\overline{AK}$ i $\overline{CD}$, respectivament.
Demostreu que $\angle BMN = 90^{o}$.
Gúsiev 479.

Solució 1:
Siga $a = \overline{AB}$, $\overline{BC} = b$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AKC}$. Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{AK} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \overline{BK} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$\overline{CM} = \overline{AC} - \overline{AM} = \sqrt{a^2+b^2} - \frac{a^2}{2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^2+2b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Siga $\alpha = \angle BAC$, $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CNM}$:

$$\overline{MN}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^2+2b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 - 2\frac{a}{2}\frac{a^2+2b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha.$$

$$\overline{MN}^2 = \frac{4b^4 + a^2b^2}{4\left(a^2+b^2\right)}.$$

$\overline{BM}$ és la mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABK}$:

$$\overline{BM}^2 = \frac{2\overline{BK}^2 + 2\overline{AB}^2 - \overline{AK}^2}{4}.$$

$$\overline{BM}^2 = \frac{2\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2} + 2a^2 - \dfrac{a^4}{a^2+b^2}}{4}.$$

$$\overline{BM}^2 = \frac{a^4 + 4a^2b^2}{4\left(a^2+b^2\right)}.$$

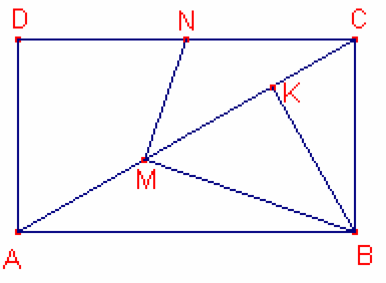
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCN}$:

$$\overline{BN}^2 = b^2 + \frac{a^2}{4}.$$

$$\overline{BM}^2 + \overline{MN}^2 = \frac{a^4+4a^2b^2}{4\left(a^2+b^2\right)} + \frac{4b^4+a^2b^2}{4\left(a^2+b^2\right)} = \frac{a^4+4b^4+5a^2b^2}{4\left(a^2+b^2\right)} = b^2 + \frac{a^4}{4} = \overline{BN}^2$$

Aplicant el teorema invers del teorema de Pitàgores $\angle BMN = 90^{o}$.

Solució 2:



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC}=\sqrt{a^2+b^2}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AKC}$. Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{AK}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{a^2}{2\left(a^2+b^2\right)}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right).$$

$$\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

$$\overrightarrow{MN}=\frac{b^2}{2\left(a^2+b^2\right)}\overrightarrow{AB}+\frac{a^2+2b^2}{2\left(a^2+b^2\right)}\overrightarrow{BC}.$$

$$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}.$$

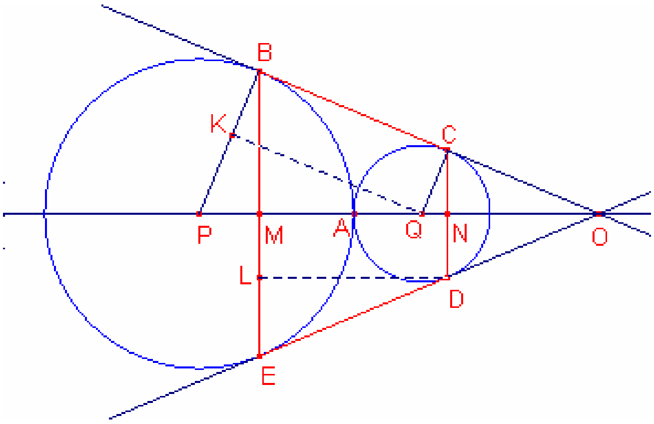
$$\overrightarrow{MB}=\frac{a^2+2b^2}{2\left(a^2+b^2\right)}\overrightarrow{AB}+\frac{-a^2}{2\left(a^2+b^2\right)}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{1}{4\left(a^2+b^2\right)^2}\left(b^2\left(a^2+2b^2\right)\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2-a^2\left(a^2+2b^2\right)\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right)=$$

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{a^2b^2}{4\left(a^2+b^2\right)^2}\left(\left(a^2+2b^2\right)-\left(a^2+2b^2\right)\right)=0.$$

Aleshores, $\angle BMN=90^{\circ}$.

10.- Dues circumferències de radis a, b $a>b$ són tangents exteriors.
S'ha traçat les rectes tangents exteriors a les dues circumferències.
Determineu l'àrea del quadrilàter format pels 4 punts de tangència.
Gúsiev 268.



Solució:
Siga P el centre de la circumferència de centre P i radi a.
Siga Q el centre de la circumferència de centre Q i radi b.
Siga A el punt de tangència de les dues circumferències.
Siga 2α l'angle que formen les dues rectes tangents.
Siga O el punt intersecció de les dues rectes tangents.
Siga BCDE el trapezi que determina els quatre punts de tangència.

Siga M la projecció de B sobre la recta OP.
Siga N la projecció de C sobre la recta OP.
Siga K la projecció de Q sobre el radi $\overline{PB}$.
Siga L la projecció de D sobre el segment $\overline{AE}$.
$\angle PBM = \angle PQK = \angle EDL = \alpha$.
$\overline{PQ} = a+b$, $\overline{PK} = a-b$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKQ}$:
$\overline{KQ} = \overline{BC} = \sqrt{(a+b)^2+(a-b)^2} = 2\sqrt{ab}$.

$\sin\alpha = \dfrac{a-b}{a+b}$, $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b}$.

Notem que $h = \overline{MN} = \overline{DL}$ és l'altura del trapezi de bases paral·leles $\overline{BE}$; $\overline{CD}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle $\overset{\Delta}{PMB}$:
$\overline{BM} = a\cdot\cos\alpha$. Aleshores, $\overline{BE} = 2a\dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b} = 4a\dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle $\overset{\Delta}{QNC}$:
$\overline{CN} = b\cdot\cos\alpha$. Aleshores, $\overline{CD} = 2b\dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b} = 4b\dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle $\overset{\Delta}{DLE}$:
$\overline{DL} = \overline{MN} = 2\sqrt{ab}\cdot\cos\alpha$. Aleshores, $\overline{CD} = \sqrt{ab}\dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b} = 4\dfrac{ab}{a+b}$.

La superfície del trapezi BCDE és:

$$S_{BCDE} = \frac{4a\dfrac{\sqrt{ab}}{a+b} + 4b\dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}}{2}\, 4\frac{ab}{a+b} = \frac{8ab\sqrt{ab}}{a+b}.$$